RELATIVIDAD ESPECIAL

o acerca de cómo la concepción que la física clásica propone para el espacio y el tiempo, y que es plenamente coherente con las Leyes de Gravitación Universal promulgadas por Isaac Newton, dejan de

tener validez para el estudio de móviles que se desplacen a velocidades cercanas a la velocidad de propagación de la luz. Si bien bajo la óptica del paradigma clásico, el espacio y el tiempo son entes mensurables a través de magnitudes absolutas que son válidas para cualquier Sistema de Referencia con independencia del estado del mismo, ahora, según el nuevo paradigma establecido a partir de la Teoría de la Relatividad Especial, el espacio y el tiempo presentan un comportamiento dinámico y flexible. El espacio y el tiempo dependerán del estado del movimiento en que se encuentre el Sistema de Referencia desde el que se realicen las mediciones.Además, se verá como la conceptualización del espacio tridimensional y el tiempo unidmensional como entidades diferenciadas habrá de ser reformulada para comenzar a hablar de un continuo cuatridimensional espaciotiempo que dotará de sentido a las observaciones realizadas al amparo de los postulados sobre los que se construye la Teoría de la Relatividad Especial. Para ello tendremos que esbozar un estudio introductorio tanto del espaciotiempo, cuasieuclídeo, de Hermann Minkowski como de la Teoría de Grupos de Sophus Lie o, más concretamente, del Grupo de Henri Poincaré y de las transformaciones de Lorentz.

Vale.

LIBER PRIMVS

Per JOHANNES SVLIS

S E V I L L A - TORRE - FUENTES

MMXVIII -MMXIX

SIN LICENCIA (ni falta) DE LA AUTORIDAD

-1.1-

El fin del Espacio y el Tiempo clásicos

Antes de que llegaran James Clarke Maxwell, Hendrik Antoon Lorentz, Henri Poincaré, Hermann Minkowski y Albert Einstein, el mundo clásico imponía una cosmovisión placenteramente coherente e intuitiva. El espacio y el tiempo eran magnitudes absolutas, totalmente independientes de los cuerpos a cuya existencia e interacciones daban seno. Eran, a la vez, garantes de toda existencia, de todo movimiento y, por otro lado, ejercían de verdaderos pilares, sustrato infinito, de un edificio cosmogónico intuitivo, coherente y, aparentemente, completo [1].

En este apacible mundo clásico la materia estaba dotada (nadie sabía muy bien cómo) de una propiedad fundamental según la cual todo cuerpo material atraía, y a su vez era atraído, por todo cuerpo masivo diferente a él mismo. Todo objeto con masa desplegaba una suerte de "acción fantasmal a distancia", inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, sobre el resto de cuerpos configurando una compleja red de interacciones gravitatorias que habían determinado, determinaban y determinarían todos los fenómenos pasados, presentes y futuros que pudieran producirse en el seno del universo.[2]

Se habían descubierto las leyes que gobernaban el universo y, con ellas, se estaba dando explicación, paulatinamente, a numerosas preguntas que habían acompañado a los hombres desde que elevaron su mirada al cielo y formularon las primeras cuestiones acerca del funcionamiento de la naturaleza.

---

[1] Dado que según la Relatividad General la curvatura del espacio-tiempo es más pronunciada conforme mayor sea la gravedad, los efectos, igualmente, se notan más cuando se producen muy cerca de los cuerpos muy masivos. En el caso del Sistema Solar, las deformaciones del espacio-tiempo se notan más sobre la órbita del planeta Mercurio porque es el objeto que más cerca se encuentra del Sol. La teoría de la gravitación newtoniana presupone un universo plano y, sobre dicha hipótesis, se calculaban los movimientos planetarios. Ésta predice una órbita elíptica cerrada para cada planeta, con el Sol en uno de sus focos, y en la que a la menor distancia posible al Sol se la denomina perihelio. Teniendo en cuenta las interacciones debidas al resto de planetas y otros astros, la posición del perihelio no es fija y va oscilando a lo largo de los años. A este movimiento, el desplazamiento del eje focal de la órbita, se le denomina precesión del perihelio. Según los cálculos extraídos mediante la teoría clásica de la gravitación, para mercurio se predice una precesión de 531 segundos de arco por siglo, 277" para Venus, 153" para la órbita de Júpiter, etc. Sin embargo, según los datos observacionales, en el caso de Mercurio la desviación era realmente de 574", es decir, existía una discrepancia de 43". Una discrepancia similar apareció también para el planeta Urano, pero ésta fue explicada rápidamente por las perturbaciones que ejercía otro planeta, Neptuno, que se descubrió en 1846. Aplicando la misma lógica, se predijo la existencia de un nuevo planeta cercano al Sol, denominado Vulcano, y que sería la causa que explicaría la observada anomalía de la órbita de Mercurio. Pero Vulcano nunca fue encontrado, persistiendo, así, la incómoda realidad de la anomalía en la precesión del perihelio de Mercurio.

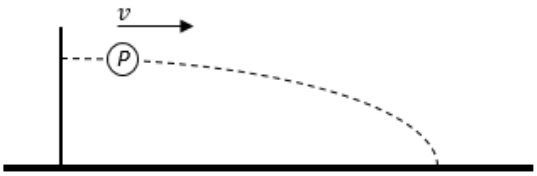
Einstein resolvió este problema incorporando una pequeña corrección, desde la Teoría de la Relatividad General, a la ley de gravitación universal de Newton.

[2] Demonio de La Place.

En el centro del sistema solar, el Sol, soberano, desplegaba una ***acción instantánea*** (muy importante) sobre todos los planetas que, atados por la inquebrantable atracción gravitatoria, orbitaban en caída libre[3] en torno al él.

[3] Para el siguiente experimento mental supongamos que no hay rozamiento a causa del aire del entorno.

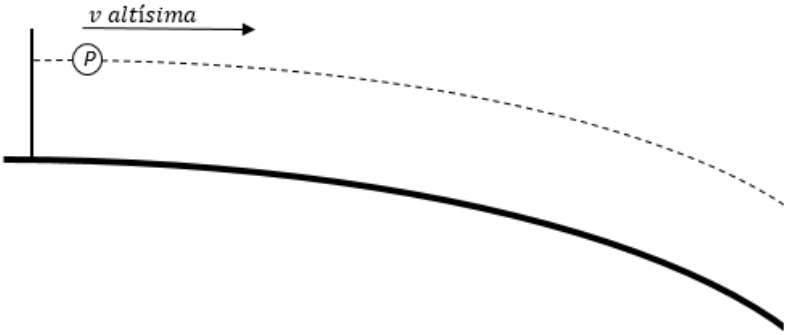
Si desde un punto determinado de la tierra se lanza un proyectil P, al que se le imprime una velocidad v, todos coincidiremos en que dibujará una trayectoria similar a la que se recoge aproximadamente en el siguiente esquema:



Es obvio que el proyectil P estará sometido a 2 fuerzas. Una de carácter horizontal que es la que le imprime la velocidad de desplazamiento "hacia la derecha" y otra de carácter vertical y hacia el suelo, que es la que ejerce la atracción gravitatoria.

De hecho, como hemos dicho que vamos a suponer que no hay rozamiento con el aire, el choque del proyectil con la tierra al final del trayecto es el que provoca la detención del movimiento.

Ahora, sin embargo, supongamos que la fuerza horizontal que ejercemos sobre el proyectil es suficientemente poderosa como para imprimir una velocidad altísima al mismo. Una velocidad tan, tan alta que el proyectil recorre una distancia hacia la derecha tan elevada que sucede que la curvatura de la tierra empieza a tomar efecto haciendo que el "suelo" baje el mismo grado en que cae el proyectil, es decir, que permite al proyectil "alcanzar" la curvatura terrestre. Observemos el siguiente esquema:



Como, además, hemos supuesto que no existe rozamiento con el aire, efectivamente, habríamos puesto dicho proyectil en órbita.

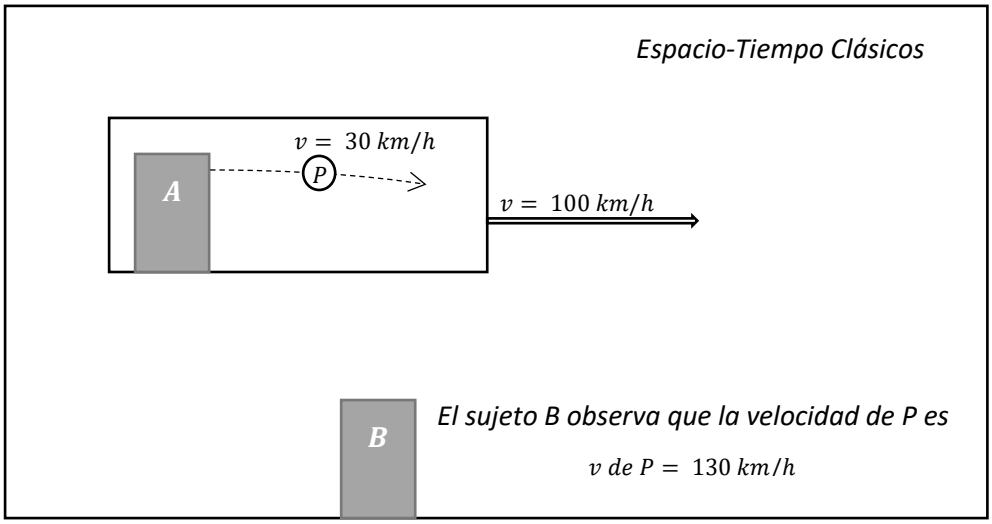
En dicha situación, por ejemplo, está la luna sobre la tierra. Podríamos decir que está "en caída libre hacia la tierra".

En este escenario clásico, si por algún avatar de la voluntad divina (deus sive natura) se pudiese sustraer de la existencia el cuerpo del sol, es decir, si por casualidad, el sol desapareciera (y con él toda su masa), la Tierra "percibiría" su desaparición *instantáneamente* e, ipso facto, abandonaría las rutas circulares que, cual Sísifo, venía recorriendo desde hacía eones para, por fin, libre, continuar su ruta, esta vez en línea recta, hacia nuevos parajes cósmicos hasta que algún otro señor la hiciera caer en su red de atracción.

Por otro lado, también, en el mundo clásico, las velocidades de los cuerpos eran siempre aditivas, es decir, se superponían unas sobre otras. Por ejemplo, si un individuo A, subido en un tren que viajara, supongamos, a una velocidad estable de 100 Km/h (conformando un Sistema de Referencia Inercial[4]) lanzara hacia adelante, dentro de su vagón, una pelota de tenis (P) con una velocidad de 30 Km/h, éste (el sujeto A) vería que la pelota, sencillamente, se alejaría de él (en el sentido del lanzamiento) a una velocidad de, efectivamente, 30 Km/h.

Sin embargo, un sujeto B, que observara el lanzamiento estando sentado en un banco desde la estación de tren, vería que la pelota se desplazaría en el sentido del lanzamiento a una velocidad de 130 Km/h. Como es obvio para la intuición, a la velocidad de la pelota habría que añadir la velocidad que previamente traía el tren en el que viajaba el lanzador (sujeto A).

El escenario sería parecido al esquema siguiente:

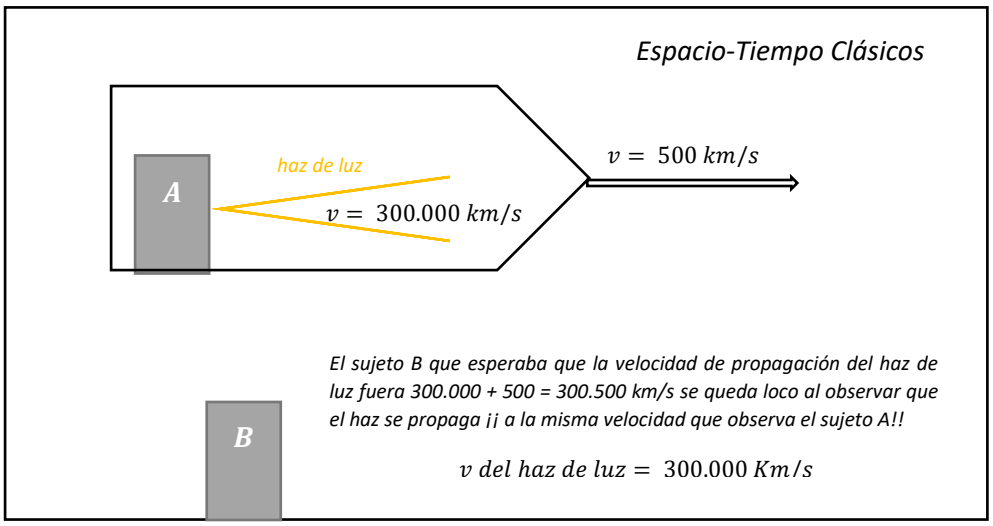


Sin embargo, este modelo tan cómodo e intuitivo, *se pone patas arriba* tras los estudios realizados por *James Clarke Maxwell*. Éste, en 1861, formuló un conjunto de ecuaciones mediante las cuales se describía el comportamiento de las ondas electromagnéticas y, muy particularmente, las ondas lumínicas. Maxwell, además, observó un fenómeno absolutamente sorprendente: según predecían sus ecuaciones, la velocidad de la luz solo dependía de las propiedades electromagnéticas del medio en que se propagaban y nunca de

[4] Un Sistema de Referencia Inercial es aquél que no está sometido a ninguna aceleración de manera que un sujeto que esté dentro (y sin posibilidad de comunicación con el exterior para poder contrastar velocidades relativas) no sería capaz de dilucidar si está en un estado de movimiento o de reposo al no sentir la aplicación de ninguna fuerza.

la velocidad del sistema de referencia desde el que se tomaban las medidas o desde el que se emitía la radiación lumínica. Dicho de otra manera: ***la velocidad de la luz era constante para todo observador***, estuviera éste en movimiento o no. Esto presentaba un enorme problema de encaje en el paradigma clásico.

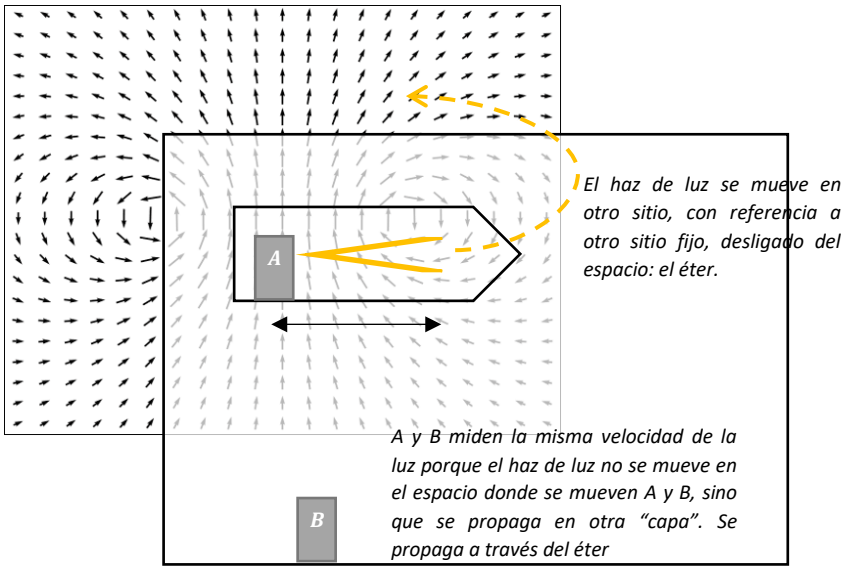
Representémoslo en un esquema similar al que ya hemos usado pero, en esta ocasión, puesto que las velocidades que vamos a manejar son muy altas, en vez situar al observador A en un tren, lo vamos a subir a un cohete que viaja a la espectacular velocidad de 500 kilómetros por segundo y, por otro lado, vamos a sentar al observador B en un plácido banco cercano ahora, yo qué sé, a Cabo Cañaveral y, además, le vamos a dotar de una vista y una capacidad para estimar velocidades, también, acojonante.



Efectivamente, la coincidencia de las velocidades medidas por el observador A y el observador B pone en serios aprietos al modelo clásico.

El único modo que, en su momento, se encontró para tratar explicar esta invarianza de la velocidad de la luz fue el de incluir una sustancia que impregnaba todo el espacio clásico y que ejercía las funciones de referente universal para las radiaciones como la lumínica al contener una serie de propiedades electromagnéticas. Es decir, una sustancia, a la que llamaron éter [5] que, como una especie de capa inmóvil, subyacía bajo una suerte de capa espacial transparente de manera que, independientemente de los movimientos que las fuentes de las radiaciones electromagnéticas hicieran, éstas, las radiaciones como la luz, se movían en referencia no al espacio sino a la capa etérea que ejercía de sistema de referencia privilegiado. Algo parecido a lo que se recoge en el siguiente esquema:

[5] Supongo que en homenaje a las hipótesis aristotélicas.



Poco después, el experimento realizado por Michelson y Morley en 1887, usando a la propia Tierra como un proyectil sobre el que viajar, confirmó el hecho de la constancia de la velocidad de la luz para cualquier observador. El procedimiento era simple: puesto que la Tierra orbita en torno al Sol a una velocidad aproximada de 30 km/s podría buscarse la adición de la velocidad de translación de la Tierra a la velocidad de un rayo de luz emitido en la misma dirección y sentido que el desplazamiento terrestre. Así se podría detectar, en el caso de que existiera, la diferencia de velocidades de propagación entre un haz emitido en la misma dirección del movimiento de translación y otro haz emitido en la dirección perpendicular a la órbita. Puesto que no pudo obtenerse un patrón de interferencia luminosa entre los dos haces hubo de darse con confirmada la hipótesis de Maxwell según la cual la velocidad de la luz era constante para cualquier observador.

En un intento de hacer coexistir estas nuevas y extrañas observaciones con el paradigma clásico, el físico Hendrik Antoon Lorentz sugirió en 1895 una nueva serie de fórmulas de transformación de magnitudes entre diferentes sistemas de referencia que, como es de imaginar, se alejaban mucho de las tradicionales transformaciones galileanas. Con tal fin, efectivamente, postuló la "*teoría del éter*" que hemos mencionado y bajo la cual objetos y observadores viajarían a través de un éter estacionario, sufriendo un acortamiento físico (hipótesis de contracción de Lorentz) y un cambio en el paso del tiempo (dilatación del tiempo). La explicación de Lorentz, y sus transformaciones, suministraban una reconciliación parcial entre la física newtoniana y el nuevo escenario propuesto por los nuevos descubrimientos en el seno del electromagnetismo.

Sin embargo, la existencia del éter como medio de propagación de las radiaciones electromagnéticas no dejaba de ser una hipótesis, quizás, demasiado *ad hoc*. Una especie de *deus ex machina* que no acababa de convencer a nadie (ni si quiera al mismo Lorentz) y contra la que muchos se revolvían tratando de buscar una explicación más convincente.

Los fenómenos electromagnéticos en relación con a las transformaciones de Lorentz fueron, también, estudiados por el matemático francés Henri Poincaré que desarrolló el conjunto de ecuaciones en la forma consistente en la que se conocen hoy día (pues inicialmente, las transformaciones formuladas por Lorentz adolecían de algunas inconsistencias matemáticas internas). Según Poincaré, cuando las velocidades implicadas

son mucho menores que la velocidad de la luz, las leyes resultantes son en la práctica las mismas que en la teoría de Newton, y las transformaciones galileanas son perfectamente válidas. Sólo para fenómenos en los que las velocidades implicadas son cercanas a la velocidad de la luz las transformaciones de Lorentz tomaban un efecto significativo, observable.

Por otro lado, el físico alemán Hermann Minkowski empezaba a hablar de un continuo espacio-tiempo. Así, a partir de los trabajos de Minkowski y Poincaré se propuso que las transformaciones de Lorentz podían interpretarse como expresiones de transformación en un espacio-tiempo cuatridimensional (y justamente éste es el enfoque que vamos a seguir en el presente trabajo).

Finalmente, llegados a este punto, fue Albert Einstein el que, recogiendo todos estos conceptos que hemos esbozado someramente hasta aquí, propugnó un cambio radical elaborando una teoría plenamente consistente (sin referencias a sustancias exóticas como el éter) que se basaba en ***dos postulados fundamentales***:

1- ***Primer postulado (principio de Relatividad)***. Un sistema de referencia inercial, en términos generales, es aquél en el que el movimiento de las partículas puede describirse empleando sólo fuerzas reales sin necesidad de considerar fuerzas ficticias[6]. En resumidas cuentas, un sistema de referencia inercial es aquél en el que, desde dentro, sería imposible dilucidar si está en movimiento o en reposo. Una vez establecida esta precisión, el primer postulado de la Relatividad especial establece que la observación de un fenómeno físico por más de un observador inercial debe producir un acuerdo entre los observadores sobre la naturaleza de la realidad[7]. Es decir, ***las leyes del universo son las mismas sin que importe el marco de referencia inercial[8].***

2- ***Segundo Postulado: la velocidad de propagación de la luz en el vacío es constante***, con independencia del movimiento que estén realizando la fuente emisora o el observador que la mide.

Con tal fin, Albert Einstein elaboró (1905) su Teoría de la Relatividad Especial en la que desarrollaba de manera perfectamente completa el movimiento de los cuerpos en un espaciotiempo plano y, diez años más tarde, fue capaz de incorporar las interacciones gravitatorias en su Teoría de la Relatividad General[9].

---

[6] Las fuerzas ficticias o inerciales, que no son realizadas concretamente por ninguna partícula, son aquellas que "se generan" cuando se produce una rotación o aceleración.

[7] Debe presentar covarianza de Lorentz.

[8] Toda teoría física debe ser matemáticamente similar para cada observador inercial, presentando a lo sumo variaciones dentro del rango de las condiciones iniciales de la misma.

[9] En Relatividad Especial, Einstein demostraba que el tiempo es relativo; que depende del observador y por tanto no existe un tiempo absoluto. El problema de la Relatividad Especial es que se aplica solamente a observadores que se mueven a velocidad constante. Para añadir qué ocurre cuando el observador acelera, Einstein tuvo que generar su teoría de la Relatividad General, donde la gravedad ejerce un papel importante como aceleración. La Relatividad General es una teoría que intenta unificar la gravitación y la Teoría Especial de la Relatividad. En ésta, la fuerza de la gravedad no puede transmitirse más rápido que la velocidad de la luz. Partiendo del hecho según el cual no existe un único tiempo, tampoco puede existir un único espacio,

Según esta última, la gravedad no sería una fuerza de atracción mutua, instantánea y a distancia, entre cuerpos masivos. La gravedad, realmente, no sería otra cosa que el efecto producido por la deformación que un cuerpo masivo provoca en el tejido espacio-temporal. Las órbitas de los planetas serían, realmente, líneas rectas que se despliegan en un espaciotiempo curvado por la masa de los cuerpos. Bajo este nuevo paradigma, si, como proponíamos en el paradigma clásico, fuésemos capaces de eliminar la presencia del sol y su masa del sistema solar, lo que se produciría sería una perturbación en el espacio-tiempo, una onda[10], del mismo modo en que se producen en la superficie de un estanque cuando se la perturba lanzando una piedra sobre ella. Dicha onda, la gravitacional, se propagaría a la velocidad de la luz y, hasta que no alcanzara la Tierra, ésta, seguiría orbitando "en torno al sol" aun cuando éste ya no estaría donde se le suponía. Sólo cuando la onda expansiva provocada por la desaparición del sol alcanzara la Tierra pasados aproximadamente unos 8 minutos, sólo entonces, el espacio por el que orbita el planeta dejaría de estar curvo y, por lo tanto, sólo en ese momento la Tierra quedaría "libre" de la interacción gravitatoria que ejercía el Sol. Su línea recta dejaría de estar deformada y cerrada en forma de curva y, efectivamente, sólo entonces comenzaría a vagar, esta vez sí, en línea recta por un espacio ya no deformado por la masa, al menos, del Sol.

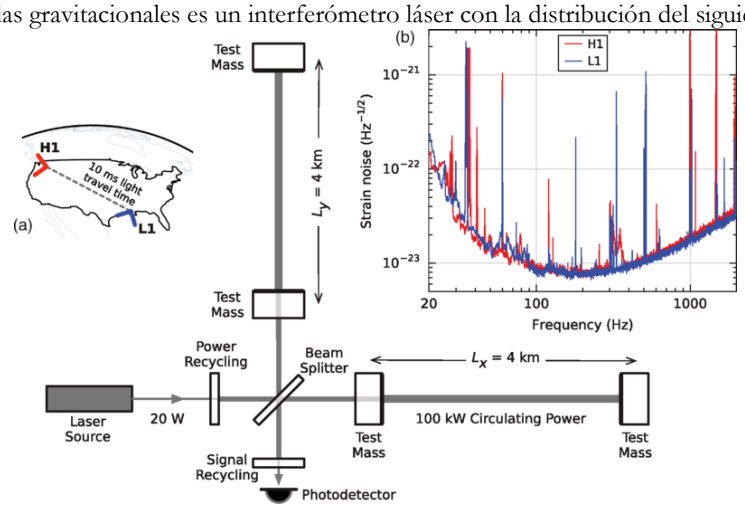
Por otro lado, y volviendo ahora a la Relatividad Especial (que es por la que comenzaremos el desarrollo de nuestro texto) Albert Einstein propuso que un cuerpo masivo, cuando se mueve, produce en el espaciotiempo que lo acoge en su seno una serie de perturbaciones proporcionales a la velocidad con que se desarrolla el desplazamiento.

Según Albert Einstein cuando un cuerpo se desplaza, con velocidad constante, en el espacio tiempo provoca un acortamiento (en la dirección del movimiento) en el lecho del

---

puesto que la relación espacio/tiempo viene determinada por la velocidad de la luz y ésta es una constante independiente del observador. Entonces si el tiempo se modifica, el espacio debe modificarse también.

[10] El 11 de febrero de 2016, las colaboraciones LIGO, Virgo y GEO600 anunciaron la primera detección de ondas gravitacionales, producidas por la fusión de dos agujeros negros a unos 410 megapársecs de la Tierra. La señal recibió el código GW150914. GW es el acrónimo de onda gravitacional (en inglés) y el código numérico representa el año, mes y día de su descubrimiento.
El detector de ondas gravitacionales es un interferómetro láser con la distribución del siguiente esquema:



(OBSERVACIÓN: al tener los tubos por los que se lanza el láser una distribución perpendicular, se optimiza la posibilidad de detectar la GW evitando que sea paralela a ambos)

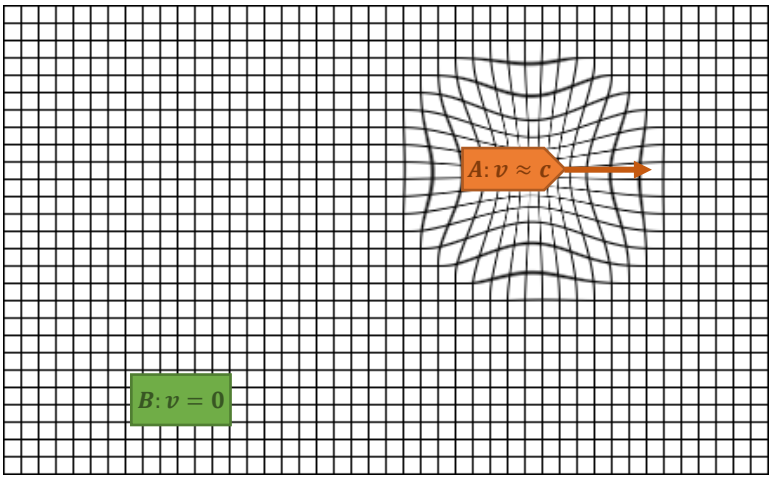
Naturalmente si L_x y L_y cambian de longitud respectivamente debido al influjo de las GW, el interferómetro detectará un desfase en la confluencia de los láseres emitidos.

espacio en el que se produce y, por otro lado, provoca una elongación, proporcional a dicho acortamiento, en la dimensión temporal de manera que la medición realizada internamente por un observador situado en el sistema en movimiento permanece perfectamente consistente y coherente con lo esperado.

Expliquémoslo un poco más (aunque al final del presente trabajo deberá haber quedado perfectamente claro).

Cuando un cuerpo se mueve, no es que se acorte el cuerpo. Lo que sucede es que el espacio que lo acoge se acorta y el tiempo en que se produce el movimiento se ralentiza, se elonga. Todos los átomos del cuerpo se "aplastarán" unos contra otros, pero no porque reduzcan la distancia entre ellos, sino porque el espacio que les da lecho, el tejido sobre el que se sitúan, como si fuera una malla elástica, se acorta. Algo así como cuando hacemos un dibujo en un globo hinchado y, después, lo deshinchamos: el dibujo parece más pequeño (habitualmente se ve como más definido, con la línea como más oscura) pero, realmente, la cantidad de tinta, el dibujo, sigue siendo el mismo, sencillamente es el lienzo que le daba soporte el que ha cambiado.

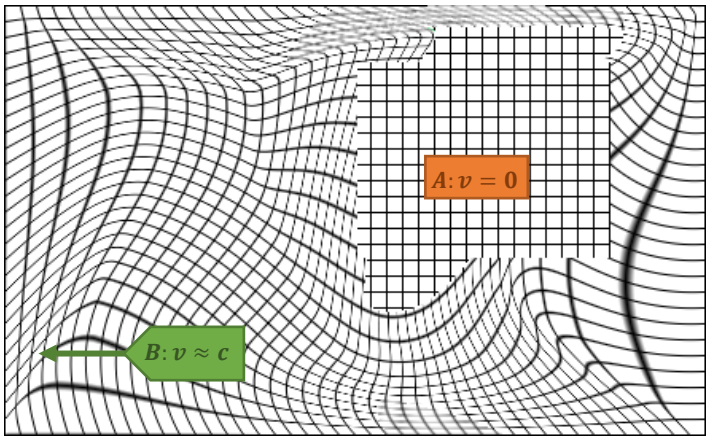
Analicemos el siguiente esquema:



Vemos que un observador A, que se desplaza a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, ha "deformado" el tejido espacio temporal por el que se desplaza. Digamos que un observador B, en reposo respecto a A pues, que él sepa, no ha activado ninguna palanca para activar mecanismo alguno que modifique su posición (ya veremos al final de la sección de Relatividad Especial qué papel tan interesante desempeñan las aceleraciones), ve cómo A se aleja de él mientras, además, aprecia cómo su apariencia (la de A) se deforma, se "comprime", mientras que la suya propia (la de B) permanece intacta.

Uno podría pensar que, en tal caso, lo que permanece en reposo es aquel cuerpo cuyo lugar que ocupa en el espacio no se ha deformado pero… es que resulta que lo que A observa es que, desde su punto de vista, en su entorno, todo permanece normal, sin deformación alguna (insistimos, se trata de un sistema inercial con velocidad constante, sin aceleración) mientras que el que se aleja, en este caso hacia la izquierda según nuestro esquema, es B y, lo que es más importante, que ¡el que se deforma es el espacio de B! ¡B es el que presenta una forma achatada! ¡B y todo el universo que no se esté moviendo junto a A!

El observador A vería algo parecido a lo siguiente:



Es decir, desde el punto de vista de A, todo el universo se está moviendo y, lo más llamativo: todo el Universo se ha deformado mientras que sólo él permanece incólume.

Y más ***importante*** aún, dicha deformación, como ya hemos dicho, no es exclusivamente *espacial* pues si el espacio se ha "encogido", para que la coherencia de la medición dentro de cada sistema se conserve[11], el ***tiempo debe dilatarse***. Cuando, en movimiento, el espacio se comprime, el conjunto espaciotiempo, permanece coherente, porque, digamos, el tiempo se esfuerza en deformarse proporcionalmente a la distorsión sufrida por el espacio para que las mediciones sigan siendo coherentes desde dentro. Así, al ser un segundo más largo podríamos decir que la manilla del reloj tarda más (para un observador que mire desde fuera) en recorrer el segundo. El observador externo tiene la sensación de que el reloj del que viaja respecto a él va más lento (¡y viceversa!).

Claro, el problema ahora es doble ¿cómo podríamos identificar ahora un punto espacial y un momento de referencia "no deformado" que no seamos exclusivamente nosotros mismos? Imposible. Por eso esta teoría se denomina Teoría de la Relatividad.

Ya en tiempos de Newton hubiera sido difícil, por no decir casi imposible, convencer a una persona especialmente testaruda de que la que se movía era ella y no el resto del Universo a su alrededor. Ahora no sólo seguimos conservando el mismo problema, sino que lo hemos agravado notablemente:

- Por un lado, el espacio no es una magnitud constante que podamos subdividir de manera homogénea para catalogarlo y seccionarlo. No es un ente isomorfo en el que podamos definir una serie de coordenadas privilegiadas. El espacio es una especie de tejido deformable en el que es imposible definir un punto de referencia absoluto puesto que, aun cuando un observador A perciba que "*los centímetros de su entorno miden un centímetro*" y un observador B observe, igualmente, que "los centímetros de su entorno miden también un centímetro", el problema surgirá cuando "comparen entre ellos los centímetros" pues verán que tienen diferente longitud.
- Por otro lado, casi más extraño aún, sucede que el tiempo del observador que está sometido a algún movimiento es diferente al tiempo de cualquier otro observador que, aparentemente, permanezca quieto respecto a él (si surgen dudas sobre quién

[11] Un observador que pudiera viajar, hipotéticamente, en una nave a una velocidad cercana a la velocidad de la luz no observaría nada extraño en su entorno… es más, él sólo vería "cosas raras" ¡fuera de la nave!

se mueve de verdad y quién no, tengamos paciencia, al final veremos quién es '*el asesino*', no hagamos spoilers).

En esta situación, ¿cuál es sistema absoluto de referencia? ¿Acaso existe, siquiera, la mera posibilidad de algo así? La respuesta es: definitivamente, no.

1. Resumidamente, antes, en el paradigma Newtoniano, el movimiento era, ciertamente, relativo, pero el Espacio y el Tiempo eran magnitudes absolutas, ajenas a lo que sucedía dentro de ellas y, mediante una convención, podríamos llegar a establecer criterios de referencia absolutos: por ejemplo, establecer el sol como "el kilómetro cero" del sistema solar. En el nuevo paradigma relativista, sin embargo, esto se hace extremadamente difícil: no sólo el movimiento, como en el mundo clásico, es relativo, sino que, además, el Espacio y el Tiempo también lo son. ¿Cómo establecer, siguiendo el ejemplo anterior, al sol como "kilómetro cero del Sistema Solar" si acabamos de descubrir que las unidades métricas cerca de un cuerpo muy masivo como una estrella no coinciden con las mismas unidades, pero empleadas entorno a un cuerpo menos masivo? O peor aún, ¿cómo llegar a un acuerdo sobre unidades si éstas son diferentes dependiendo de la velocidad con la que un cuerpo se mueve?[12]. En todo caso ya no podemos hacerlo mediante el mismo tipo de convenciones que se establecían en el mundo clásico. Ahora, en el mejor de los casos, haría falta establecer, por decirlo de alguna manera, una especie de convención de convenciones[13].

[12] Sobra decir que dichos efectos de contracción y elongación son perceptibles sólo a velocidades altísimas, cercanas a la velocidad de la luz (o junto a cuerpos muy masivos). También se producen en nuestra vida cotidiana pero, naturalmente, son totalmente inapreciables. Por ejemplo, téngase en cuenta que un piloto que viajara en el avión supersónico más potente que el hombre haya sido capaz de fabricar, a máxima velocidad, sufriría (no él, sino el espacio que él y el reactor en movimiento ocupan) un acortamiento, en la dirección del movimiento, de aproximadamente la una cuarta parte del diámetro de un núcleo de un átomo de Hidrógeno.

[13] Recuerdo una vez que le comentaba al Camacho que acaso "lo único que está en reposo es la luz que permanece en una especie de '*estado potencial*' antes de propagarse". La idea tiene cierto interés filosófico y, de hecho, no es otra cosa que lo que los físicos denominaron éter: el reposo absoluto. Si bien empíricamente se ha demostrado que esto no es necesario, el desarrollo histórico del asunto permite encadenar las ideas que nos surgen en la cabeza y ver cómo se aportaron diferentes soluciones a un mismo problema.

-1.2-

Los Grupos de Lie

$\mathfrak{L}$

En primer lugar, ¿qué es un grupo?

Un Grupo es un conjunto de elementos g que pueden relacionarse entre ellos mediante una operación como, por ejemplo, el producto.

Además de ello, dicho conjunto, para conformar realmente un Grupo, debe cumplir una serie de condiciones: a) que tenga la propiedad asociativa, b) que exista el elemento identidad y c) que exista el elemento inverso.

Si además de estas tres propiedades cumple una propiedad adicional, d) la propiedad conmutativa, entonces ese Grupo además de ser *Grupo*, por a), b), c) es *Grupo Abeliano*, por incluir, también, la d).

Recapitulemos. Un Grupo:

1. Es un conjunto de elementos g dotados de una operación: $(g,\cdot)$
2. Debe tener la Propiedad Asociativa:
   a. $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
3. Debe contener un elemento Identidad (el uno):
   a. $\exists I \ / \ g \cdot I = I \cdot g = g$
4. Debe contener el Elemento Inverso (cada elemento de g tiene su inverso):
   a. $\forall g \in G \ \ \exists g^{-1} \ / \ g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = I$
5. Existe una condición adicional para ser, además de Grupo, Grupo Abeliano: Propiedad Conmutativa[14]:
   a. $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$

Ahora, entonces, ¿qué es un Grupo de Lie?

Para exponerlo supongamos que tenemos que caracterizar una **rotación**[15] en el plano, por ejemplo, xy. Es decir, ¿mediante qué algoritmo rotamos un punto en el plano?

[14] Esta condición 5 no la vamos a requerir en todo lo que vamos a abordar en nuestras indagaciones.

Hay dos modos:

1. El método tradicional: usando la Trigonometría.
2. Un método mucho más potente: usando *Transformaciones que dejan invariante una magnitud*.

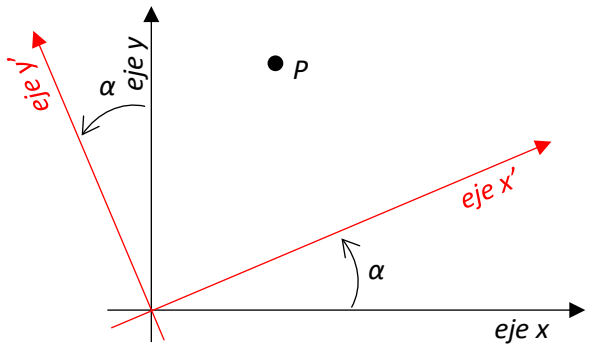
Procedamos a usar la metodología tradicional para empezar a desarrollar nuestros estudios sobre Filosofía Física.

---

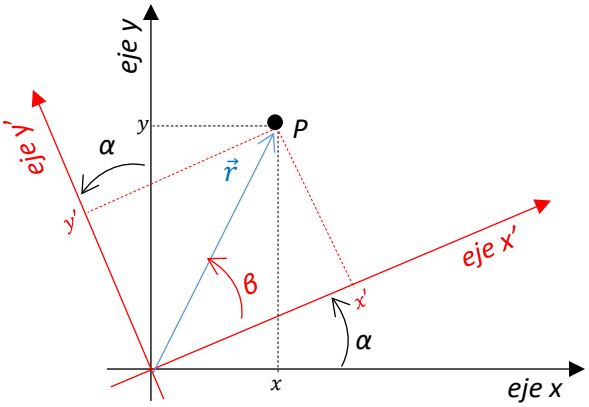
[15] ¿Por qué una rotación? ¿Por qué empezamos, así como así, a hablar de rotaciones? Partamos de un hecho experimental fundamental: la velocidad de la luz es constante, la misma, para cualquier observador, sea cual sea el estado de dicho observador. Es decir, es una magnitud invariante SIEMPRE.
Ahora, pensemos, ¿qué tipo de "transformaciones", "modificaciones", "cambios", dejan invariante una magnitud? Por ejemplo, supongamos que estamos frente a un árbol. De fondo hay un bosque. Yo cambio mi posición y todo cambia en torno al árbol desde mi perspectiva: el fondo, la relación del árbol con el fondo y, viceversa, yo cambio respecto de él. Sin embargo, a pesar de todos esos cambios que se producen tras mi "transformación", puedo hacer que algo permanezca invariante. ¿Qué? Mi distancia hasta el árbol. En tal caso lo que habré hecho respecto del árbol es "rotar". Todo cambia, pero mi distancia al árbol, el radio, no cambia.
En relatividad estamos buscando, pues, transformaciones, cambios, que dejen alguna magnitud invariable, por eso tenemos que empezar a hablar de rotaciones.
¿Quiere esto decir que (ya lo veremos) los cuerpos con comportamiento relativista (todos) en Espacios de Minkowski lo que se están haciendo son rotaciones? Pues algebraicamente sí (matizar pues realmente, el tipo de matriz (que no será antisimétrica) con la que se trabajará en el espacio de Minkowski no es de rotación), pero en la realidad, no tanto. Es decir, debemos ver en esto un mero aparataje instrumental. Usamos las rotaciones porque son las herramientas algebraicas que tenemos para estudiar cambios que dejan invariantes magnitudes, pero ¿quiere eso decir que en la realidad las cosas "giran en torno a algo" en relatividad? Pues no. Sencillamente hacemos un uso instrumental de determinadas técnicas algebraicas: las rotaciones (y, repetimos, en el espacio de Minkowski, ni siquiera podríamos llamarlas rotaciones propiamente dichas, aunque el procedimiento es el mismo pero cambiando un signo,… bueno, no nos precipitemos, tengamos paciencia…). Sencillamente es una cuestión instrumental. Instrumentalismo frente a Realismo. Para entender de verdad lo que sucede es muy importante no confundir la operativa, las técnicas usadas para describir los fenómenos, con la realidad.

1.2.1. Rotaciones desde la Trigonometría.

Supongamos 2 Sistemas de Referencia (SR y SR') y rotemos uno de ellos (el SR')en torno al origen (lo más obvio y fácil) y veamos cómo se ve, desde cada marco de referencia, un punto P de posición aleatoria. Esto que hacemos se denomina ***Rotación Pasiva***, es decir: interpretamos que el punto P está fijo y que lo que rota son los observadores, cuyas ecuaciones para describir el punto P, variarán de un marco de referencia a otro.



Tracemos un vector $\vec{r}$:



Tenemos que dicho vector, puesto que ambos sistemas rotan en torno al origen, tendrán el mismo módulo, aunque su definición trigonométrica respecto a los ejes de cada Sistema de Referencia será diferente. Así las componentes en cada eje, naturalmente, suponiendo que el módulo de $\vec{r}$ sea r, son:

$$x' = r \cdot \cos\beta$$

$$y' = r \cdot \sin\beta$$

$$x = r \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

Ahora, partiendo de un par de identidades trigonométrica de toda la vida (no las explicamos, pero son muy típicas; se pueden consultar en cualquier sitio y son fácilmente demostrables):

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

Podremos sustituir y llegar a:

$$x=r\cdot(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$y=r\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$$

Ahora, si desarrollamos el producto en ambas expresiones:

$$x=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta$$

$$y=r\sin\alpha\cos\beta+r\sin\beta\cos\alpha$$

Pero, si observamos las expresiones de las que partíamos, vemos que podemos seguir sustituyendo y tener x e y en función de x' e y', es decir:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

Esto lo podemos expresar matricial y vectorialmente de manera que tendremos que el vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ será el producto de una Matriz R (una rotación) por el vector $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, es decir, conoceremos "el algoritmo", la transformación…, el modo en que cada Sistema de Referencia definirá el vector $\vec{r}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

En definitiva, tenemos un vector definido para un Sistema de Referencia (SR) como el vector visto por el otro Sistema de Referencia (SR') multiplicado escalarmente por una matriz y, por lo tanto, podremos pasar del sistema $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ al sistema $S'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ a través de la matriz de rotación R:

$$\vec{u}=R\cdot\overrightarrow{u'}$$

Ahora, si quisiéramos *despejar* el vector $\overrightarrow{u'}$, tendríamos que multiplicar en ambos lados por la inversa de la matriz (es lógico, una rotación se deshace "anti-rotando", es decir, invirtiendo la rotación), es decir:

$$R^{-1}\cdot\vec{u}=RR^{-1}\cdot\overrightarrow{u'}$$

Pero, ojo, muy importante, antes de realizar esta operación de *despeje* hay que atender a una serie de consideraciones acerca de las condiciones que debe reunir la matriz *R* para poder proceder.

Lo primero que hemos de saber es que, al contrario de lo que sucede con los números racionales, no todas las matrices tienen una inversa. Sólo tienen inversa aquellas matrices

que tienen un determinante diferente de cero[16]. En dicho sentido, se llama matriz invertible o regular a aquella cuyo determinante es diferente de cero (nosotros necesitamos que

[16] El determinante de una matriz es la asignación de un escalar (un número, ya está) a una matriz cuadrada. Se extrae operando, de cierta manera, con los elementos componentes de una matriz. El determinante de una matriz sirve para estudiar el número de soluciones posibles de un sistema de ecuaciones lineales. Se suele expresar como:

$$siendo\ \Lambda\ una\ matriz \rightarrow \det(\Lambda) = |\Lambda|$$

Los determinantes son de orden 1, 2, 3, …. Según el tamaño de la matriz.

Los de orden 1. Está clarísimo… el único elemento de la matriz de 1x1 es su Determinante.

Los de orden 2. Lo importante son las diagonales primaria y secundaria, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow su\ determinante\ es: \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (0 \cdot 1) = 2 - 0 = 2$$

Los de orden 3. Muy similar, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = (1 \cdot 2 \cdot 3) + (0 \cdot 3 \cdot 4) + (2 \cdot 1 \cdot 0) - [(4 \cdot 2 \cdot 0) + (2 \cdot 0 \cdot 3) + (1 \cdot 3 \cdot 1)] \rightarrow$$

$$\det A = (6) + (0) + (0) - (0) - (0) - (3) = 3$$

Los de orden 4, por ejemplo:

2	3	-2	4
3	-2	1	2
3	2	3	4
-2	4	0	5

Esto es algo más complicado y, para ello, vamos a utilizar el método de cofactores.

Elegir una columna al azar (habitualmente la que tenga más ceros para facilitar las cosas).

Se multiplica el -2, el 1, el 3 y el 0 por sus adjuntos (el determinante de la matriz resultante de quitar la columna y fila en la que están el -2, el 1, el 3 y el 0) es decir:

$$¿\pm?\ -2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} ¿\pm?\ 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} ¿\pm?\ 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} ¿\pm?\ 0$$ *(esto da igual pues es un producto por cero)*

Los signos (¿?), ¿son sumas o restas? Pues depende del lugar que ocupen en la matriz el término "predominante". Por ejemplo:

$$el\ (-2)\ ocupa\ \partial_{13} \rightarrow 1 + 3 = 4\ (par) \rightarrow (-1)^4 = +1. Luego\ es\ suma\ (\ en\ este\ caso, +(-)\ ).$$

$$el\ (1)\ ocupa\ \partial_{23} \rightarrow 2 + 3 = 5\ (impar) \rightarrow (-1)^5 = -1. Luego\ es\ resta.$$

$$el\ (3)\ ocupa\ \partial_{33} \rightarrow 3 + 3 = 6\ (par) \rightarrow (-1)^6 = +1. Luego\ es\ suma.$$

$$el\ (0)\ ocupa\ \partial_{43} \rightarrow 4 + 3.. qué\ más\ da, es\ cero, ya\ está.$$

Luego nos queda:

$$-2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 0$$

nuestra matriz sea así) y matriz irregular o singular a aquella cuyo determinante es igual a cero. Claro, para saber si podemos aplicar la operación de despeje que hemos propuesto, lo primero que debemos saber es si nuestra matriz es invertible, es decir: ¿es el determinante de nuestra matriz de rotación diferente de cero?

Veámoslo:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin)^2\alpha \rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \rightarrow \mathbf{det(R) = 1}$$

(OBSERVACIÓN: esto es una identidad trigonométrica de tooooda la vida, no la explicamos por obvia. Se puede explicar perfectamente, en una circunferencia goniométrica, mediante Pitágoras: la suma del cuadrado de los catetos será igual al cuadrado de la hipotenusa que, en el caso de la circunferencia unitaria, coincide con el radio=1)

Al saber que su determinante no es cero no solo podremos despejar como vamos a hacer, sino que, además, al saber que el determinante es 1, hemos recopilado una importante información: estamos ante una Matriz ***Special*** (sigla "***S***").

Una ***Matriz de Rotación siempre*** ha de ser ***Special*** y, además, debe ser ***Ortogonal***, es decir, que sus componentes, digamos, "la dimensiones que la conforman" (por ejemplo x, y, z) sean linealmente independientes entre sí (en breve veremos qué es esto), algo así como que desde una de estas dimensiones no se puede definir a las otras porque son perpendiculares entre sí[17].

Las ***matrices de rotación***, en resumen, son:

- ***matrices cuadradas (nxn)***
- ***tienen determinantes reales***
- son ***Special*** $(det(R) = 1)$
- son ***Ortogonales*** *("dimensiones linealmente independientes")*

El conjunto de todas las Matrices de Rotación forman un grupo: ***el Grupo de Rotaciones (Special Ortogonal: SO)***.

Así que, siguiendo nuestro hilo principal, puesto que ya sabemos que el determinante de nuestra Matriz de Rotación *R* es diferente de cero, podremos despejar, como decíamos, multiplicando por la matriz inversa en ambos lados de la expresión que teníamos:

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = RR^{-1} \cdot \overrightarrow{u'}$$

Y como sabemos que un elemento por su inversa es igual a 1 (en el caso de las matrices, naturalmente, la matriz Identidad: $I = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$) podríamos rescribir como:

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = RR^{-1} \cdot \overrightarrow{u'}$$

Ahora se sacan los determinantes de orden 3 que tenemos y se realizan las multiplicaciones (se puede reducir por Gauss, pero, pasando del tema, ahora lo hacemos a pulso, en definitiva, con un Excel se hace rápido) y el determinante es: -286.

[17] Ya lo veremos más adelante cuando definamos los Espacios Vectoriales pero de, momento podemos, hacernos una idea pensando que en un espacio de 3 dimensiones x, y, z, desde la dimensión, por ejemplo, x no podemos alcanzar la dimensión y o z, pues están en otro plano, conforman, digamos, un mundo diferente… efectivamente, una dimensión diferente.

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = I \cdot \overrightarrow{u'}$$

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{u'}$$

Vamos a realizar el *despeje*. Vamos a empezar calculando la inversa de la matriz *R*:

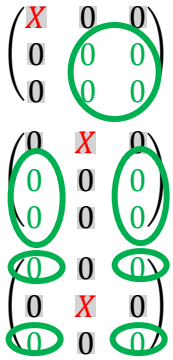
$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

La expresión que define el modo en que se calcula la inversa de una matriz es la siguiente:

$$R^{-1} = \frac{1}{|R|} \cdot (R^{adj})^T$$

¿Cuáles son los elementos de esta expresión? Definámoslos mientras los calculamos.

a. $|R|$, ya lo sabemos, es el determinante de la matriz R. Ya lo conocemos: es 1.
b. R^{adj}, es la matriz adjunta de otra matriz. ¿Qué es esto? La matriz adjunta de una matriz es la matriz resultante de poner el determinante de la matriz adjunta de cada elemento como elemento de la nueva matriz. Como parece un poco lioso (*no lo es*), lo ilustraremos a continuación con colores. En el miembro "X" de la nueva matriz, en rojo, se pone el determinante de la matriz adjunta (en verde) a ese elemento … vamos a poner varios pasos de una misma matriz de ejemplo:



Es decir, en el caso que nos ocupa, la matriz adjunta de la matriz R, será:

$$R^{adj} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

c. $(R^{adj})^T$, es la matriz Traspuesta de la matriz Adjunta. ¿Qué es la matriz traspuesta? Muy simple, es la matriz resultante de invertir filas/columnas de una matriz, es decir, poner las filas como columnas y las columnas como filas (como la trasposición típica del Excel). En este caso, ya lo vemos, lo que hacemos es trasponer la matriz adjunta que ya hemos obtenido en el paso (b).

$$(R^{adj})^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

d. Y, finalmente, antes de acabar hay que cambiar el signo de los elementos de la matriz $(R^{adj})^T$ resultante usando un patrón que ya hemos usado en la nota 16:
   - *elementos con suma de subíndices pares se multiplican por (+1), por ejemplo:* $\partial_{11}: subíndice\ 1+1=2$, *no se cambia.*

- *elementos con suma de subíndices impares se multiplican por (-1), por ejemplo:* $\partial_{11}: subíndice\ 1+1=2$*, no se cambia.*

Es decir, que pasamos de:

$$(R^{adj})^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

e. Y, para terminar de calcular la Inversa, sustituimos en la expresión que tenemos para calcular la inversa:

$$R^{-1} = \frac{1}{|R|} \cdot (R^{adj})^T$$

Es decir:

$$R^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

De donde resulta que, finalmente, tenemos que:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Y ahora fijémonos en una particularidad muy interesante de esta matriz de Rotación *R*. Tenemos que:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la Traspuesta de *R*? R^T

$$R^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Y… ¿Cuál ha sido el resultado del cálculo de la matriz inversa R^{-1}?

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Es decir, que resulta que ¡ $\boldsymbol{R^{-1}}$ *y* $\boldsymbol{R^T}$ *son iguales*!

$$R^{-1} = R^T$$

Sigamos tirando de este hilo que parece tan productivo.

Es bastante obvio, también, que un elemento multiplicado por su inverso (esto pasa en la aritmética de los números racionales sin que nos cause sorpresa alguna) arroja como resultado la unidad. Por ejemplo:

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

En nuestro conjunto de matrices sucede exactamente lo mismo: una matriz multiplicada por su inversa es la Identidad:

$$RR^{-1} = I$$

Entonces, gracias a que $R^{-1} = R^T$, podremos decir que:

$$\boldsymbol{RR^T = I}$$

Que es, justamente, la propiedad que hace que esta matriz sea ***Ortogonal***.

(OBSERVACIÓN: esto, $RR^T = I$, precisamente, es la definición matemática de las matrices Ortogonales que mencionábamos anteriormente, es decir, matrices cuyas dimensiones son linealmente independientes (en breve veremos qué es esto). A nada que se piense un poco tiene toda la lógica del mundo pues algo así como coger una matriz, 'darle un giro de 90º' y restarla a ella misma… Si el resultado es cero, entonces es que las dimensiones se han anulado mutuamente, por lo que son perpendiculares entre sí. Ya hemos dicho que esto va a pasar con todas las matrices de rotaciones en espacios de n dimensiones)

(OBSERVACIÓN 2: damos por supuesto que se conocen los procedimientos, absolutamente 'sudokeros' para el cálculo del producto, resta, suma de matrices… de todas formas como hasta ahora, en realidad, no nos hace falta desarrollarlos (a no ser que queramos verificar esto que estamos diciendo) hemos pospuesto su recuerdo a momentos en que, necesariamente, tenemos que aplicarlos).

Ahora, una vez que tenemos nuestra matriz ***Special Ortogon***al 'demostrada' (ya sabemos que $det\,(R) = 1\; y\; RR^T = I$) y, por lo tanto, podemos estar seguros de que va a hacer rotaciones sin problemas (pues reúne todas las características propias de una matriz de rotación) podremos, según nuestro plan, despejar aquella expresión que teníamos pendiente en la página 17 y, así, conocer, partiendo de *un vector visto por* SR' y una matriz de rotación, conocer el *vector según* SR. Es decir:

$$\vec{u} = R \cdot \overrightarrow{u'}$$

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = RR^{-1} \cdot \overrightarrow{u'}$$

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = I \cdot \overrightarrow{u'}$$

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{u'}$$

Con lo que ya podríamos conocer el vector $\overrightarrow{u'}$ en función del vector $\vec{u}$ (digamos, visto desde el Sistema de Referencia Preferente) y la inversa $({R_{(\alpha)}}^{-1})$ de una Rotación $R_{(\alpha)}$ que también conocemos, a saber:

$$R^{-1} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{u'} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x'}_1 \\ {x'}_2 \end{pmatrix}$$

Donde el resultado de dicho producto sería (azul fila/rojo columna)[18]:

$$\begin{pmatrix} R_{11}x_1 + R_{12}x_2 \\ R_{21}x_1 + R_{22}\,x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x'}_1 \\ {x'}_2 \end{pmatrix}$$

Es decir, que:

[18] Recordemos que el producto entre matrices se resuelve, por ejemplo, para el elemento ∂_{12} de la matriz resultante, se suma el producto de la fila 1 de la matriz 1 con los elementos (elemento contra elemento) de la columna 2 de la matriz 2. Importante, recuérdese que el producto entre matrices NO es conmutativo.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\, x_1 + \sin\alpha\, x_2 \\ -\sin\alpha\, x_1 + \cos\alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$x'_1 = \cos\alpha\, x_1 + \sin\alpha\, x_2$$

$$x'_2 = \cos\alpha x_2 - \sin\alpha\, x_1$$

Esta transformación la podríamos expresar, de manera más general, (para esta rotación de 2x2) como (ojo a los colores fila/columna):

$$x'_1 = \sum_{i=1}^{2} R_{1i}\, x_i$$

$$x'_2 = \sum_{i=1}^{2} R_{2i}\, x_i$$

Que podríamos generalizar definitivamente como:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{2} R_{ij}\, x_j$$

(OBSERVACIÓN: Einstein cansado de escribir mil millones de veces los sumatorios, se inventó una regla: el criterio de suma de Einstein, decía algo así que al ver repetidos índices en expresiones como ésta: $R_{ij}x_j$, en realidad se trata de un sumatorio…).

Llegados a este punto, recapitulemos y relacionémoslo con el concepto de Grupo que hemos definido al principio.

¿Conforman rotaciones como la que hemos hecho un Grupo?

Veamos. Tenemos un ***conjunto infinito continuo*** de matrices de rotación $R_{(\alpha)}$[19] tales que $\boldsymbol{RR^T = I}$ y cuyo $\mathbf{det(R) = 1}$, es decir, Special Ortogonal (SO), como hemos visto:

$$\boldsymbol{G = \{R_{(\alpha)} \ / \ RR^T = I \ , \det(R) = 1\}}$$

Estas características, más el hecho de que consta de infinitos elementos – continuo, hacen que este Grupo sea de Lie.

Estas rotaciones son un grupo porque cumplen las condiciones antes expuestas para ser un grupo (las matrices, los elementos de nuestro conjunto, tienen ***producto, son***

[19] $\alpha = 2\pi\, rad$,es decir,de 0 a 2,tenemos infinitos - continuo números reales posibles. Esto es importante: hay infinito elementos y hay un continuo, no son elementos discretos, es decir, podemos "acercar" un elemento a otro tanto como queramos, infinitamente. Así, por ejemplo, podemos tener dos elementos como los siguientes:

$$\boldsymbol{R_{(0.85)} \quad y \quad R_{(0.85000001)}}$$

Estos dos elementos están "muy, muy cerca", son casi lo mismo y, matemáticamente, a esto se le dice que son una Variedad.

asociativas, elemento identidad y elemento inverso y son ***"de Lie"*** porque cumplen, también, que el ***conjunto de elementos es infinito y continuo*** (esto va a ser necesario para hacer *micro-rotaciones*… ahora lo veremos).

A este Grupo en concreto que hemos expuesto de matrices de 2x2 se le llama:

$$SO(2)$$

- S por '***Special'*** (Grupo en que las matrices cumplen que $\boldsymbol{\det(R) = 1}$).
- O por '***Ortogonal'*** (Matriz ortogonal es aquella que cumple que $\boldsymbol{RR^T = I}$).
- 2 por su dimensión 2x2 y morfología (ya veremos las métricas).

$SO(2)$, por lo tanto, que es Grupo y es de Lie, forma parte del conjunto de Grupos de Lie tal y como lo son también diversos grupos importantes para la Física Teórica actual como son:

- SO(n) - Rotaciones en espacios de n dimensiones.
- SU(n)[20] –
- SU(3) – Para describir la Interacción nuclear fuerte que asegura la estabilidad nuclear.
- SU(2) - El spin de un electrón
- SO(1,3) - Grupo de Lorentz (para la relatividad).
- …

Mediante el desarrollo del ***Método Tradicional Trigonométrico*** nos hemos podido acercar a una serie de definiciones que nos han permitido conocer cuáles son las características que debe reunir un conjunto de elementos para ser denominado ***"Grupo de Lie"***, y sabiendo que las rotaciones que nos ocupan forman un Grupo de Lie, debido a las características que conocemos de este tipo de rotaciones ($\boldsymbol{RR^T = I}$, $\boldsymbol{det(R) = 1}$, ***infinito-continuo***) podremos pasar a estudiar el segundo modo de proceder a la hora de caracterizar una rotación. Un modo mucho más interesante y extensible a numerosas parcelas de la Física Teórica actual.

[20] SU (n) de Special Unitary Group de grado n es el grupo de matrices unitarias (ya veremos qué es esto, tiene que ver con los números complejos) n x n con determinante igual a 1

1.2.2. Procedimiento de Sophus Lie.

Vamos, ahora, a proceder a caracterizar la rotación de un vector desde un enfoque mucho más potente y cuya principal virtud es que nos permitirá generalizar el comportamiento a espacios de *n* dimensiones (incluidas las componentes complejas, tremendamente útiles y necesarias en estudios de Relatividad y Mecánica Cuántica).

Lo que Sophus Lie propuso, en resumen, es algo así como que si queremos rotar un ángulo finito de, por ejemplo, 45 º, podemos hacerlo como una suma de pequeñas rotaciones infinitesimales (recordemos que su grupo es, como hemos visto, infinito y continuo). Esto es: $x' = \Lambda x$, donde Λ es una matriz del tipo $e^{\theta B}$, es decir, el resultado de exponenciar un ángulo θ multiplicado por una matriz B del tipo: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$[21], que es un generador de rotación. Ahora mismo esto no nos suena de nada, pero no sólo nos acabará sonando, sino que nos acabará cautivando.

Para empezar a ilustrar esto hagamos una ***rotación activa***, por ejemplo, en 2 dimensiones (aunque esto es extrapolable perfectamente a espacios de *n* dimensiones) que, naturalmente, será una Transformación (rotación en este caso, como estamos diciendo) que deja invariante una magnitud.

Veamos: tenemos un vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que ***rotamos*** a $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

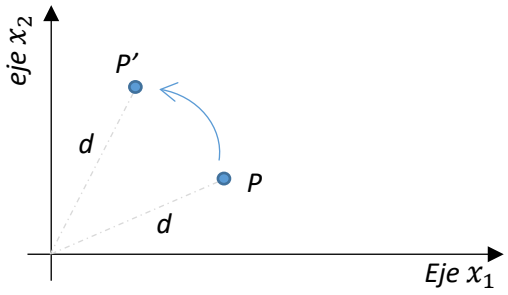
Ese "rotamos" es, obviamente, una matriz, es decir que:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Qué es R y cómo podemos definirla, caracterizarla, es lo que vamos a estudiar ahora.

Pensemos, como decíamos, por un momento, en una ***rotación activa*** de un punto desde una posición P a una nueva posición P'. Pensemos en cómo las coordenadas de, supongamos, un punto que ocupa un lugar pre-rotación y otro post-rotación, cambian. ¿Qué magnitud, en dicha rotación, puede quedar invariante? Obviamente, el radio, la distancia al eje (siempre que la rotación sea una rotación circular de radio constante, claro). Es decir, supongamos un espacio bidimensional x_1x_2 (xy):

[21] Esta matriz B es lo que hace que las cosas roten, si cambiamos algo en ella, se producen transformaciones, sí, pero de otro tipo, ya no son las rotaciones, digamos, típicas. De hecho, vamos a ver que esto cambiará para explicar los fenómenos relativistas porque se harán "rotaciones raras", de otro tipo (en realidad no las podemos llamar rotaciones)… lo veremos más adelante.



Donde, obviamente, $d = d$.

Llamemos a las coordenadas x e y como x_1 y x_2, y definamos el radio de la rotación, la distancia d invariante, como (por Pitágoras):

$$d = d$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}$$

Como el radio debe ser $>= 0$ (¡claro, debe existir! No es imaginario: $i = \sqrt{-1}$), podremos elevar al cuadrado ambos lados y decir:

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}\right)^2$$

Y, por lo tanto, concluir que:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 \equiv S^2$$

Donde $\boldsymbol{S^2}$ es nuestra ***magnitud invariante***.

Investiguemos ahora esa matriz R que provocaba la rotación de un punto P a un punto P'. Sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Que aplicando el producto entre matrices y vectores columna nos deja:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x_1 + & R_{12}x_2 \\ R_{21}x_1 + & R_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Donde tenemos el vector reconfigurado de manera que:

$$R_{11}x_1 + R_{12}x_2 = (es\ x_1\ rotado) = x'_1$$

$$R_{21}x_1 + R_{22}x_2 = (es\ x_2\ rotado) = x'_2$$

Empecemos ahora la secuencia de sustituciones usando los elementos de los que ya disponemos. Sabemos que:

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Sustituyamos, pues:

$$(R_{11}x_1 + R_{12}x_2)^2 + (R_{21}x_1 + R_{22}x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Desarrollamos:

$$R_{11}{}^2x_1{}^2 + R_{12}{}^2x_2{}^2 + 2R_{11}x_1R_{12}x_2 + R_{21}{}^2x_1{}^2 + R_{22}{}^2x_2{}^2 + 2R_{21}x_1R_{22}x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Factorizamos y nos queda:

$$x_1{}^2\left(R_{11}{}^2 + R_{21}{}^2\right) + x_2^2(R_{12}{}^2 + R_{22}{}^2) + 2(R_{11}R_{12} + R_{21}{}^2R_{22}{}^2)x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Si analizamos lo anterior, para que la igualdad que postulamos se produzca debe cumplirse que:

$$\left(R_{11}{}^2 + R_{21}{}^2\right) = 1$$

$$\left(R_{12}{}^2 + R_{22}{}^2\right) = 1$$

$$\left(R_{11}R_{12} + R_{21}{}^2R_{22}{}^2\right) = 0$$

(OBSERVACIÓN: el término x_1x_2 no existe en la derecha)

Esto, efectivamente, debe ser coherente (y lo es) con una de las condiciones fundamentales que hemos establecido para las Matrices de Rotación: que sean ***matrices Ortogonales***, es decir, que la Matriz de Rotación que estamos empleando cumpla que $R \cdot R^T = I$. Para verificarlo, calculemos la Matriz Transpuesta de nuestra Matriz Hipotética de Rotación R:

$$R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{11}} & \boldsymbol{R_{12}} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \rightarrow R^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_{11}} & R_{21} \\ \boldsymbol{R_{12}} & R_{22} \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos R por su Traspuesta obtenemos que:

$$R \cdot R^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}{}^2 + R_{21}{}^2 & R_{12}R_{11} + R_{22}R_{21} \\ R_{12}R_{11} + R_{21}R_{22} & R_{12}{}^2 + R_{22}{}^2 \end{pmatrix}$$

Y, según habíamos impuesto en la anterior sección de fórmulas marcadas de color azul, ciertamente vemos que llegaríamos a:

$$\begin{pmatrix} R_{11}{}^2 + R_{21}{}^2 & R_{12}R_{11} + R_{22}R_{21} \\ R_{12}R_{11} + R_{21}R_{22} & R_{12}{}^2 + R_{22}{}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Así, el único modo en que podemos hacer que la ***Invarianza*** que nos proponemos se cumpla es que estemos tratando con una matriz de rotación tal que para ella se ***cumpla forzosamente*** que:

$$R \cdot R^T = I$$

Vamos comprobar con más detalle si esto está siendo así.

Para ello, en primer lugar, vamos a presentar un modo de, digámoslo así para entendernos, pasar del ***'entorno matricial'*** al modo '***algebraico polinómico'***. Aprovechando las propiedades del producto entre matrices, si presentamos el producto de un vector fila con un vector columna, es decir, una expresión por su traspuesta, alcanzaremos una expresión de tipo polinómico.

Veámoslo. Si multiplicamos dos vectores del siguiente modo:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Alcanzamos la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} (x_1)^2 \\ (x_2)^2 \end{pmatrix}$$

En cambio, si lo expresamos de esta otra manera:

$$\vec{x}^T \cdot \vec{x} \rightarrow (x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Alcanzaremos la expresión bajo esta nueva forma:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2$$

Teniendo esto en cuenta, y sabiendo que hemos definido:

$$\overrightarrow{x'} = R\vec{x}$$

Podremos decir que:

$$\vec{x}^T \cdot \vec{x} = (x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1{}^2 + x_2{}^2, \textit{que sabemos que es} = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 \equiv S^2$$

Resulta evidente que también se cumplirá, simétricamente, que:

$$(\overrightarrow{x'})^T \cdot \overrightarrow{x'} = (x'_1)^2 + (x'_2)^2$$

Por lo que podremos decir que (dejamos de usar el símbolo vector, aunque es más que obvio que seguimos tratado de vectores):

$$x^T \cdot x = (x')^T \cdot x' \equiv S$$

Y, puesto que estamos obligando a que:

$$R \cdot R^T = I$$

Y (*as bajo la manga*) conocemos la propiedad de las matrices según la cual:

$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$

Vamos a poder proponer que, partiendo de:

$$x' = Rx$$

Podremos decir que, trasponiendo en ambos lados de la expresión marcada en azul:

$$(x')^T = (Rx)^T$$

Que, aplicando la propiedad del producto de matrices que hemos marcado en rojo, es lo mismo que:

$$(x')^T = R^T x^T$$

Si ahora, con el fin de alcanzar nuestra expresión invariante al cuadrado, multiplicamos en ambos de la expresión verde por x'(en la izquierda con forma, efectivamente, de x' pero en la derecha, bajo la forma de Rx pues…, en definitiva, es lo mismo, ¿verdad?):

$$(x')^T x' = R^T x^T Rx$$

Que, si desarrollamos, nos queda:

$$(x')^T x' = x^T \cancel{R^T R} x \ (R^T R \ es \ la \ identidad: I)$$

$$(x')^T x' = x^T x$$

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2$$

Es decir, que obtenemos la magnitud Invariante que buscamos siempre y cuando la matriz de rotación cumpla que ella multiplicada por su traspuesta es igual a la identidad:

$$\boldsymbol{x^T \cdot x = (x')^T \cdot x' \ cuando \ R \cdot R^T = I}$$

A partir de esto, Sophus Lie (1842-1899) tuvo una idea que, a pesar de lo obvia que pueda parecer, tiene una gran potencia a la hora de desarrollar teóricamente sus consecuencias. Su idea fue la de sumar un montón de rotaciones diferenciales. Es decir:

$$Rotar \ \theta \qquad - \ sería \ lo \ mismo \ que - \qquad Rotar \left(\frac{\theta}{N}\right) N \ veces$$

Es decir:

$$R(\theta) = \left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N$$

Claro, esta rotación: $R\left(\frac{\theta}{N}\right)$ es muy, muy, muy pequeña… es una rotación tan pequeña que es casi como no rotar nada, es decir, es casi la Identidad más esa pequeña rotación que vamos a llamar A:

$$R\left(\frac{\theta}{N}\right) \approx I + A$$

Donde A es una matriz muy "*pequeña*" o, mejor dicho, una matriz cuyos elementos componentes son $0 < x << 1$: muy pequeños; de una magnitud tal que podamos decir que:

$$A^2 = 0$$

Es decir, algo que es tan, tan, tan pequeño, que al multiplicarlo por algo igualmente pequeño da algo tan pequeño que podemos decir que es igual a cero (ésta es una típica definición de diferencial, algo tan, tan pequeño, que, si lo elevas al cuadrado, entonces da un producto igual a cero).

Así, como decimos, hacer una rotación "diferencial" es decir que:

$$R\left(\frac{\theta}{N}\right) \approx I + A$$

Y, por lo tanto, la rotación finita acumulada que queramos hacer será:

$$\left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N \approx (I + A)^N$$

Donde A, ya lo hemos dicho, es una matriz compuesta por elementos de magnitud infinitesimal y N es un número muy grande.

Fijémonos ahora en la matriz que nos ocupa, es decir, la matriz "de la rotación infinitesimal" (aún no la hemos elevado a N veces):

$$R\left(\frac{\theta}{N}\right) \approx (I + A)$$

Esta matriz debe cumplir que:

$$R \cdot R^T = I$$

Luego, si sustituimos, tendremos que:

$$(I + A)(I + A)^T \approx I$$

Recordando otra propiedad de las operaciones con matrices (*nuevo as bajo la manga*) según la cual:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Podremos reescribir:

$$(I + A)(I + A)^T \approx I$$

Como:

$$(I + A)(I^T + A^T) \approx I$$

Es decir:

$$(II^T + IA^T + AI^T + AA^T) \approx I$$

La Identidad traspuesta es la identidad, obviamente, y A por A traspuesta es equiparable a cero, luego nos quedará que:

$$\cancel{I} + A^T + A + \cancel{AA^T}(muy\ pequeño) \approx \cancel{I}$$

Luego tenemos que:

$$\boldsymbol{A^T + A = 0}$$

(OBSERVACIÓN: ya podemos usar el igual porque la aproximación a la identidad ha quedado eliminada al eliminar las identidades de cada lado. Por decirlo de alguna manera, el patrón con el que nos comparábamos ha sido eliminado y hemos pasado a mirar, desde dentro, el asunto, que, internamente, es plenamente coherente, identitario… por eso podemos poner ya el igual)

Y justamente, esto: $A^T + A = 0$, es la definición de Matriz Antisimétrica. La una anula a la otra. Veamos un ejemplo de matrices antisimétricas para que nos hagamos una idea de lo que estamos hablando:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; y \; A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Las sumamos y deben dar cero, es decir:

$$A^T + A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix}$$

Donde esto debe ser igual a cero:

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ello, para que $A^T + A = 0$, A debe ser antisimétrica y, para eso, debe darse que:

$$a_{11} \; debe \; ser \; 0$$

$$a_{22} \; debe \; ser \; 0$$

$$a_{21} + a_{12} = 0$$

$$a_{21} + a_{12} = 0 \; (esto \; es \; lo \; mismo \; que \; antes)$$

Por lo que observamos que:

- Cuando los subíndices son iguales el término vale cero.
- Cuando los subíndices son diferentes debe darse que: $a_{ij} = -a_{ji}$

Y, justamente, una configuración con coeficientes de este tipo es lo que define, como decimos, una **matriz antisimétrica**[22]. Es decir, a cada lado de una diagonal conformada

[22] Una matriz antisimétrica es una matriz cuadrada A cuya traspuesta es igual a su negativa, es decir vale la relación $A^T = -A$.
Una matriz de m × n elementos (m = filas, n = columnas):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es antisimétrica (o hemisimétrica), si es una matriz cuadrada (m=n) y $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i,j=1,2,3,…,n. En consecuencia, $a_{ii} = 0 \; \forall i$. Por lo tanto, la matriz A asume la forma:

por ceros, hay elementos opuestos. Así podemos decir que la matriz '*A*' debe presentar la siguiente morfología:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$A = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, *A* será una variable x multiplicada por una matriz **antisimétrica** (esta matriz antisimétrica es muy importante pues es lo que denominaremos un ***generador de rotación***). Podríamos expresarla así (llamemos *B* a la matriz **antisimétrica, *Generadora de Rotación***):

$$A = x(B)$$

Con todo ello, retrotrayéndonos, nuestra matriz de rotación finita acumulada vendría a ser:

$$\left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N \approx (I + A)^N$$

$$\left[R\left(\frac{\theta}{N}\right)\right]^N = \left(I + x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^N$$

Pero, claro, seguimos buscando, todavía qué es esa x, de la que por el momento sólo sabemos que debe ser algo muy pequeño, un diferencial.

Como vamos a elevarlo *N* veces, casi mejor expresamos x del siguiente modo:

$$x = \frac{\theta}{N}$$

(OBSERVACIÓN: usamos theta para definir un ángulo pues, en definitiva, de rotaciones estamos hablando, un ángulo muy pequeño: θ dividido N veces)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Un ejemplo:
La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica, ya que:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

La diagonal principal se conserva compuesta de ceros y los elementos a cada lado de esta diagonal tienen signos opuestos.

(OBSERVACIÓN 2: como N va a tender a infinito, ya vemos que x va a tender a cero, lo que, efectivamente, salvaguarda su condición de diferencial)

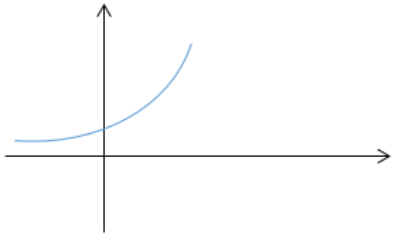
En definitiva, nuestra Rotación finita acumulada va a ser:

$$R = \left(I + \frac{\theta}{N}B\right)^N$$

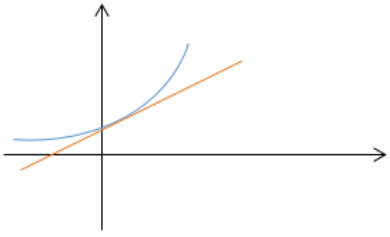
Y en esa fórmula anterior, la única variable de la matriz, el único parámetro, es el ángulo θ, que es sobre lo que vamos a seguir indagando.

Para estudiar qué es vamos a empezar a tratar de poner a rotar nuestra matriz infinitesimal para realizar una rotación finita, cuya naturaleza ya más o menos conocemos, y lo vamos a hacer a través de una aproximación en ***Series de Taylor***[23].

[23] Vamos a resumir en breves líneas la utilidad y definición del Polinomio de Taylor. Para ello usaremos un ejemplo bastante simple con el fin de ilustrar su utilidad. Supongamos que estamos ante una función $f(x)$ cuya representación gráfica sea la siguiente:

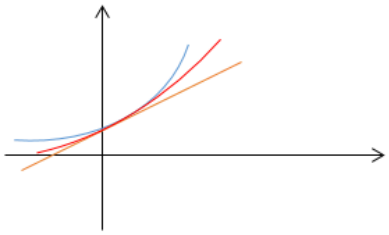


Obviamente esta función se parece a la representación de la función del número e. Una función, digamos, '*extraña*' (de hecho, es una función trascendente), no polinómica. Funciones similares a ella, '*raras*' (ahora diremos por qué las llamamos '*raras*') son, todas las trigonométricas: $cos, sen, tan, arctan, sec,$ …, las funciones $logarítmicas$, etc… En definitiva, son funciones trascendentes, funciones que no se pueden expresar de manera polinómica.
Imaginemos a alguien que sólo sabe álgebra básica, de tipo polinómico, que sólo sabe interpretar polinomios simples, expresiones del tipo $x^3 - \frac{x^2}{3} + x$ pero que necesita, por algún motivo, conocer el comportamiento de una función trascendente, como las que hemos visto antes, en un tramo determinado. La única opción que tendría esa persona sería la de buscar una función polinómica que tuviera un comportamiento parecido al de la función trascendente, al menos, en alguna franja del dominio de dicha función cercana a un punto determinado a. Para ello trataría de construir una nueva función $g(x)$ (esta vez polinómica y, por lo tanto, mucho más familiar para él) de manera que ésta coincida, al menos en un punto, con la función trascendente original que, para él, era ininteligible. Imaginemos que esa función $g(x)$ coincida con la primera en un punto, es decir, algo parecido a esto:



En ese punto, supongamos, $a = 1$, las funciones son idénticas, arrojan el mismo resultado: $f(1) = g(1)$.

Tratemos de ir extendiendo ese punto único, localizado, a un área un poco mayor, a una franja mayor. De momento, si nos fijamos, mientras más nos alejemos de ese punto (en un sentido u otro) la función $g(x)$ se hace más diferente de $f(x)$. Por ello, si le añadimos a la función $g(x)$ una condición adicional: que su derivada $g'(x)$ en $a = 1$, también coincida con la derivada de $f(x)$ en $a = 1$ (es decir, que $f'(1) = g'(1)$) tendremos que, al menos, a cada lado de $a = 1$, el comportamiento de la 'función de aproximación' $g(x)$ tendrá más parecido a $f(x)$ que antes (en el ejemplo que nos ocupa, que ambas sean crecientes a ambos lados de 1). Si ahora pensamos en una nueva versión de $g(x)$, aún mejor aproximada, a la que además de la condición de igualdad de la primera derivada, le añadimos que también la derivada segunda coincida en ese punto con la original ($f''(1) = g''(1)$), tendremos que la concavidad/convexidad a cada lado del punto a de la nueva función mejorada $g(x)$ también coincidirá con $f(x)$. Tendríamos algo parecido a esto:



Donde '$g(x)$ *mejorada*' al segundo grado (pues hemos llegado a la segunda derivada), en rojo, al cumplir que tanto su derivada primera como su derivada segunda sean iguales, en $a = 1$, a la derivada primera y segunda de $f(x)$, se aproxima mejor que la primera $g(x)$ que formulábamos al principio (observemos que mientras más nos alejamos de '*la franja*' que queremos hacer coincidir, más diferente es el comportamiento del polinomio; nunca será igual al 100%, nunca será igual en todo su domino [a no ser que derivemos infinitas veces, claro]).

Si seguimos aplicando el mismo procedimiento todas las veces que podamos (todas las veces que el polinomio $f(x)$ al que estamos 'imitando' nos lo permita) podremos obtener una función cada vez más parecida a la original, al menos en su comportamiento, en una zona circundante a un punto a determinado que nos interese.

Por eso la forma del Polinomio de Taylor para los 'entornos circundantes' de un punto $x = a$ es:

$$f(x) = f(a)(x-a)^0 + f'(a)(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Es decir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Tendríamos, entonces, un polinomio que, en una franja determinada, se parecerá muchísimo a la función trascendente original que queríamos emular. Naturalmente, mientras más iteraciones hagamos, más se parecerá el polinomio "emulador" a la función original. Idéntico no será nunca, habrá zonas de su dominio en la que la función "emuladora" no será capaz de "imitar" a la función primera (habrá un grado de error) pero, si tenemos margen para derivar muchas veces, podremos acercarnos tanto como necesitemos.

Naturalmente, si uno hace coincidir el valor de evaluación de la "función polinómica emuladora" con el mismo valor a en que queremos que coincidan las dos funciones ($x = a$), todos los factores

del "polinomio replica", excepto el primero, serán igual a cero y, por lo tanto, anulados del polinomio de Taylor de manera que la función, como es natural, quedará igual a la función inicial evaluada en el punto a. Sin embargo, lo que buscamos, como decimos, es un nuevo polinomio que nos permita hacer un acercamiento al valor de la función original, no polinómica, en una franja circundante al punto a con el que recurriendo, exclusivamente, al álgebra de polinomios elementales podamos estudiar el comportamiento de la función en un tramo determinado. Es decir, lo que tratamos de hacer es algo que históricamente siempre se intentó con poco éxito antes de Taylor: si tenemos una función, por ejemplo, como decimos, trigonométrica, trataremos de buscar un polinomio que se parezca mucho a los resultados de la función original no polinómica. Es decir: *buscar polinomios que solucionen problemas no polinómicos*.

Por otro lado, cuando $a = 0$, el polinomio, no tiene más relevancia, aparte del interés por las particularidades históricas, se denomina Polinomio de McLaurin y, como es más que obvio, genera una expresión aún más simple:

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \cdots$$

Veamos un ejemplo del 'funcionamiento' del Polinomio de Taylor.

Supongamos el siguiente problema: busquemos un polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = 1$ con el que 'podamos sustituir' la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Así, lo que buscamos, al ser una aproximación de segundo grado, es un polinomio del tipo:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

Calculemos las derivadas que vamos a necesitar:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

Luego el polinomio resultante será:

$$f(x) = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) + \frac{1}{2!}\frac{-1}{4\sqrt{a^3}}(x - a)^2$$

$$f(x) = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) - \frac{1}{8\sqrt{a^3}}(x - a)^2$$

Puesto que a, como decimos, es igual a 1, sustituyendo tendríamos que:

$$f(x) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) - \frac{1}{8\sqrt{1^3}}(x - 1)^2$$

Que, reorganizando, nos deja un polinomio mucho más asequible, con sus x, sus fracciones, sus potencias…. Todo dentro lo habitual, para aquellos que sólo quieran hacer álgebra con polinomios, digamos, facilones:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

Así, este polinomio, al sustituir x por un valor concreto, nos dará un valor aproximadamente igual a la función original evaluada en $a = 1$. Es decir este polinomio de Taylor es un polinomio que nos permite evaluar el resultado de la función original ($\sqrt{x}$) en los alrededores de $a = 1$. Es decir, nos debe dar algo muy cercano a uno. Naturalmente, el "polinomio réplica" que hemos generado no es igual en el 100% de su dominio (existe, naturalmente, margen de error, margen de alejamiento, entre el polinomio de Taylor generado y la función original) pero "en la zona" cercana al punto a y, dependiendo del número de iteraciones que hayamos desarrollado en el proceso de la serie de Taylor, tendremos resultados más cercanos entre la función "difícil" primera y el polinomio "fácil" segundo.

Probemos con valores cercanos a la "zona de estudio" a.

$$f(0) = 1 + \frac{1}{2}(0-1) - \frac{1}{8}(0-1)^2 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \rightarrow 0{,}625$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{2}(1-1) - \frac{1}{8}(1-1)^2 \rightarrow 1$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 \rightarrow 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \rightarrow 1{,}375$$

…

Obviamente, si hubiéramos desarrollado el polinomio de Taylor con más derivadas, los acercamientos serían mayores a los lados del punto $x = a$ y, además, "el dominio de parecido" entre las funciones también se había incrementado (si lo hubiéramos desarrollado infinitamente, en principio, debería ser igual en todo el dominio).

Por otro lado cabe señalar que hemos estado hablando del Teorema de Taylor en su forma Polinómica, es decir, el Polinomio de Taylor (o de McLaurin si $a = 0$). Sin embargo, podemos encontrar expresado el mismo teorema en forma de serie, no de polinomio. En términos generales:

- Forma General del Polinomio de Taylor:

$$f(x) = f(a)(x-a)^0 + f'(a)(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

- Forma General de la Serie de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Veamos un ejemplo concreto para tenerlo más claro. Usemos el número e:

$$f(x) = e^x$$

Veamos cómo se expande según el Teorema de Taylor:

$$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Vamos a hacer el desarrollo en Series de Taylor de nuestra matriz. Para ello vamos a evaluar la función $R(\theta)$ para $\theta = 0$, es decir: $R(0)$, así como todas sus subsiguientes derivaciones. Procedamos a ello. Tenemos que:

$$R(\theta) = \left(I + \frac{\theta}{N}B\right)^N$$

Luego para $\theta = 0, R(0)$:

$$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

...

$$f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Luego, aplicando la fórmula del Teorema de Taylor evaluando la función para $x = 0$ (Teorema de McLaurin) tendríamos que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = 1 + 1x + \frac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots$$

- Forma del Polinomio de Taylor para la expresión e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

- Forma de la Serie de Taylor para la expresión e^x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}}{n!}$$

OBSERVACIÓN: para desarrollar esta serie nótese que 0!=1 pues si, por ejemplo:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$2! = 1 \cdot 2$$

Vemos que:

$$5! = 4! \cdot 5 \rightarrow \mathbf{4!} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{5}}$$
$$4! = 3! \cdot 4 \rightarrow \mathbf{3!} = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{4}}$$
$$3! = 2! \cdot 3 \rightarrow \mathbf{2!} = \frac{\mathbf{3!}}{\mathbf{3}}$$
$$2! = 1! \cdot 2 \rightarrow \mathbf{1!} = \frac{\mathbf{2!}}{\mathbf{2}}$$
$$\mathbf{0!} = \frac{\mathbf{1!}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$$

$$R(0) = \left(I + \frac{\cancel{0}}{\cancel{N}}\cancel{B}\right)^{N} \rightarrow R(0) = I$$

Ahora, la derivada de R, es fácil entenderlo (véase Apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencial e Integral):

$$\frac{d}{d\theta}R(\theta) = R'(\theta) = N\left(I + \frac{\theta}{N}B\right)^{N-1} \cdot \frac{B}{N} \rightarrow R'(0) = \cancel{N}\left(I + \frac{\cancel{0}}{\cancel{N}}\cancel{B}\right)^{N-1} \cdot \frac{B}{\cancel{N}}$$

$$R'(0) = (I^{N-1})B = B$$

Sigamos:

$$\frac{d}{d^2\theta} = R''(\theta) = (N-1)\left(I + \frac{\theta}{N}B\right)^{N-2} \cdot \frac{B}{N} \cdot B \rightarrow (N-1)\left(I + \frac{\theta}{N}B\right)^{N-2} \cdot \frac{B^2}{N}$$

$$R''(0) = (N-1)\left(I + \frac{\cancel{0}}{\cancel{N}}\cancel{B}\right)^{N-2} \cdot \frac{B^2}{N} \rightarrow R''(0) = (N-1) \cdot I \cdot \frac{B^2}{N} \rightarrow R''(0) = \frac{(N-1)}{N}B^2$$

Resumamos la tercera:

$$\frac{d}{d^3\theta} = R'''(0) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}B^3$$

Y observamos que se empieza a reproducir un patrón.

$$R''''(0) = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}B^4$$

...

$$\frac{d}{d^n\theta} = R^{(n)}(0) = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)\ldots}{N^{(n-1)}}B^n$$

Esto, es fácil ver, nos va a generar una división de polinomios del mismo grado en el numerador y el denominador ya que arriba se multiplica (N − '*lo que sea*') N veces, y abajo, se eleva N a $N-1$ veces, es decir, tendremos el mismo grado arriba y abajo y esto, al evaluarlo, nos va a quedar como 1 y, por lo tanto, la convergencia de la serie cuando n tiende a infinito será:

$$R^{(n)}(0) = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)\ldots}{N^{(n-1)}}B^n$$

Donde, como hemos dicho, todo lo marcado en rojo es $= 1$ y, por lo tanto, podemos resumir como:

$$\lim_{n\to\infty} R^{(n)}(0) = B^n$$

Ahora que conocemos las derivadas de nuestra función y su evaluación para $\theta = 0$, demos forma a nuestro Polinomio de Taylor. Para ello recordemos su formulación general:

$$f(x) = f(a)(x-a)^0 + f'(a)(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Y sabiendo que:

$$R(0) = I$$

$$R'^{(0)} = B$$

$$R''(0) = \frac{(N-1)}{N} B^2$$

$$R'''(0) = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} B^3$$

$$R''''(0) = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3} B^4$$

(Donde lo rojo, ya lo hemos visto, siempre es =1)

Por lo que esto:

$$R(\theta) = R(0) + R'(0)\theta + \frac{1}{2!} R''(0)\theta^2 + \cdots$$

Nos queda como:

$$R(\theta) = I + \theta B + \frac{1}{2!} B^2\theta^2 + \cdots$$

Pero sabemos que $\theta B = A$ (recordemos nuestra matriz generadora de rotación):

$$\theta B = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que reescribimos nuestro Polinomio de Taylor bajo su forma definitiva como:

$$R(\theta) = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 \ldots$$

Y… ¿A qué nos suena esto? … Pues esto nos suena a una de las definiciones del nº e según las Series de Taylor[24]:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots$$

Por lo que podemos concluir (esto es muy importante) que:

$$\boldsymbol{R(\theta) = e^A}$$

$$\boldsymbol{R(\theta) = e^{\theta B}}$$

$$\boldsymbol{R(\theta) = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Es decir, que una rotación también se puede caracterizar como la exponencial de una matriz antisimétrica, cuyo determinante sea igual a 1.

Y, lo más importante, esto es generalizable a *n* dimensiones, como habíamos dicho al principio de este epígrafe.

[24] Véase nota 23.

Pero… ¿cómo se eleva un número a una matriz?[25]

[25] Esto que vamos a explicar es para matrices diagonalizables.

Una matriz es diagonalizable si existe una matriz diagonal D y una matriz de paso P (ambas extraídas, ahora veremos cómo, de la propia *matriz protagonista* A) que sea invertible tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

Esto es:

- La matriz diagonal D tiene en la diagonal los valores propios de la matriz A.
- Las columnas de la matriz de paso P son los vectores propios asociados a los valores propios de A dispuestos en el mismo orden
- La expresión $A = PDP^{-1}$ es equivalente a $AP = PD$

Desarrollemos un caso de exponenciación de una matriz para verlo más claramente. Por ejemplo:

$$e^A$$

Sabemos que el desarrollo de Taylor de la función e^x en $x = 0$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

De forma análoga, si A es una matriz, entonces e^A en $x = 0$:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

Vamos a estudiar si A es diagonalizable.

Tenemos que, si A es diagonalizable, entonces debe cumplirse que:

$$A = PDP^{-1}$$

E, igualmente, se debe cumplir que la matriz A elevada a, por ejemplo, m:

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la matriz diagonal D debe ser una matriz con la tipología:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dicha matriz diagonal D, elevada a m es la misma matriz D pero con los elementos de la diagonal elevados a m, es decir:

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Así, teniendo en cuenta todo esto:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

Tendríamos que:

$$e^A = PP^{-1} + PDP^{-1} + \frac{PD^2P^{-1}}{2!} + \frac{PD^3P^{-1}}{3!} + \cdots + \frac{PD^mP^{-1}}{m!} + \cdots$$

(OBSERVACIÓN: ponemos la Matriz identidad como $P \cdot P^{-1}$ porque nos conviene para nuestro desarrollo)

Si nos fijamos, vemos que cada sumando del desarrollo de Taylor, está "rodeado" de P a la izquierda y P^{-1} a la derecha, por lo que podremos factorizar del siguiente modo:

$$e^A = PP^{-1} + PDP^{-1} + P\frac{D^2}{2!}P^{-1} + P\frac{D^3}{3!}P^{-1} + \cdots + P\frac{D^m}{m!}P^{-1} + \cdots$$

$$e^A = P\left(\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\left(\frac{\lambda_1}{m!}\right)^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{m!}\right)^2\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}\left(\frac{\lambda_1}{m!}\right)^m & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{m!}\right)^m\end{pmatrix} + \cdots\right)P^{-1}$$

La suma de lo que está contenido en el paréntesis (fácil, elemento contra elemento, claro está) es:

$$e^A = P\begin{pmatrix}1 + \lambda_1 + \cdots + \left(\frac{\lambda_1}{m!}\right)^m + \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{m!}\right)^m + \cdots\end{pmatrix}P^{-1}$$

Observamos, los únicos elementos distintos de cero son aquellos que están contenidos en la diagonal.

Si nos fijamos en dichos elementos de la diagonal, por ejemplo, el primero, vemos un patrón de sumas infinitas que nos es familiar (e al rescate!):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

Por ello, la exponencial de una matriz diagonalizable es entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

$$e^A = P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n + \cdots + e^{\lambda_n} + \cdots\end{pmatrix}P^{-1}$$

(OBSERVACIÓN: $\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n + \cdots + e^{\lambda_n} + \cdots\end{pmatrix}$ es D)

Donde $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ son cada uno de los valores propios (es, en definitiva, la matriz Diagonal).

Pero, ¿qué es P y cuáles son esos valores propios? Es sencillo. Sólo hay que calcularlo a partir de A.

Para comprenderlo más fácilmente, vamos a hacer un ejemplo.

Calculemos e^A para una matriz de ejemplo $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

Para ello debemos calcular:

1- ***Polinomio característico*** de la matriz:

Para ello se usa el Teorema de Cayley-Hamilton según el cual se puede afirmar que el determinante de una matriz diagonalizable A menos $\lambda \cdot Identidad$ es igual a cero, es decir, que:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Es decir:

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{matrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{matrix}\right| = 0$$

Es decir, que:

$$(1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 3\cdot 2 = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 6 = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}$$

Es el ***Polinomio Característico*** de la matriz A

2- ***Valores propios*** de la matriz:

Son aquellos que verifican el Polinomio Característico de la matriz. En este caso, el P.C. es muy simple pues basta con encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado. Así, los ***valores propios*** de la matriz A son:

$$\boldsymbol{\lambda = 4}$$

$$\boldsymbol{\lambda = -1}$$

Ya de entrada, ***puesto que 2 valores propios distintos en una matriz de 2 columnas implican vectores propios linealmente independientes*** *(esto de la dependencia e independencia lineal, como vemos, ha salido ya varias veces y todavía nos puede sonar medio a chino… en breve lo aclararemos. Si queremos saberlo ya, véanse, más adelante, notas 33 y 34)*, podemos afirmar con total seguridad que la ***matriz es diagonalizable***, es decir, que ***se puede expresar como:*** $\boldsymbol{A = PDP^{-1}}$

(OBSERVACIÓN: puede pasar que tengamos valores propios iguales, pero ello no implicaría inmediatamente que la matriz no sea diagonalizable pues al desarrollar los vectores propios podemos encontrar que sean linealmente independientes. Si, en cambio, viéramos que no fuera diagonalizable, se acabó el proceso)

Sigamos buscando información que necesitamos para culminar nuestro proceso. Busquemos ahora los vectores propios de la matriz A.

3- ***Vectores propios*** de la matriz (revisar):

Multipliquemos el polinomio característico por un vector de dos dimensiones (una matriz columna):

$$|A - \lambda I|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda)\mathrm{x} & 2y \\ 3x & (2-\lambda)\mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora retomamos los valores propios de manera que:

- En el subespacio vectorial donde $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} (1-4)\mathrm{x} & 2y \\ 3x & (2-4)\mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3\mathrm{x} & 2y \\ 3x & -2\mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Que nos deja dos ecuaciones:

  1- $-3x + 2y = 0$
  2- $3x - 2y = 0$

  Ambas nos aportan la misma información. Usemos, cualquiera de ellas, por ejemplo, la primera y tendremos que:

$$2y = 3x \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

  Que es la ecuación de los vectores del subespacio asociado a dicho valor propio. Así, los vectores tendrían la forma:

$$\left(x, \frac{3}{2}x\right)$$

  Es decir, que lo vectores tendrían la forma de:

$$\left(1, \frac{3}{2}\right)$$

  Que, forzándolo a que ambas coordenadas sean números enteros, nos dará el ***vector propio*** generador del subespacio $\lambda = 4$ (que, ya de paso, tiene dimensión 1):

$$(\mathbf{2}, \mathbf{3})$$

- En el subespacio vectorial en que $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} (1-(-1))\mathrm{x} & 2y \\ 3x & (2-(-1))\mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\mathrm{x} & 2y \\ 3x & 3\mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Que nos deja las ecuaciones:

  1- $2x + 2y = 0$
  2- $3x + 3y = 0$

  Que nos dan, de nuevo, la misma información en ambos casos. Cojamos, por ejemplo, la primera:

$$2x + 2y = 0 \rightarrow 2y = -2x \rightarrow y = -x$$

  Es decir que los vectores del subespacio asociado tendrán la forma:

$$(x, -x)$$

  Que para el caso del ***vector propio*** generador del subespacio $\lambda = -1$ en que x es igual a la unidad, tendremos que:

$$(\mathbf{1}, \mathbf{-1})$$

4- Matriz Diagonal y Matriz de paso P:

- La ***Matriz Diagona***l se conforma poniendo en la diagonal los ***valores propios***, es decir:

Desarrollar la exponencial de una matriz es algo tedioso, así que ahora, en vez de desarrollarlo, vamos a volver a usar las Series de Taylor para aproximarnos a la solución y veremos, por el camino, cómo podremos desviarnos del proceso al ver que se nos abre una vía, un atajo, que se va acercando a la matriz que ya vimos usando *la metodología clásica trigonométrica*.

Procedamos, entonces, a desarrollar en Series de Taylor esta exponencial que puede expresarse tanto como:

$$R(\theta) = e^{\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}$$

Como:

$$R(\theta) = exp\left[\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

Preparemos el terreno.

$$D = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

- La ***Matriz de Paso P*** se conforma poniendo como columna ***los vectores propios***:

$$P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Ahora, ya tenemos los datos oportunos para resolver la expresión que teníamos. Recordemos:

$$e^A = P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1+\lambda_n+\cdots+e^{\lambda_n}+\cdots\end{pmatrix}P^{-1}$$

Donde $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5}\end{pmatrix}$

Por lo que, finalmente:

$$e^{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^4 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^4 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{2e^4}{5}+\frac{3}{5e}} & \boldsymbol{\frac{2e^4}{5}-\frac{2}{5e}}\\ \boldsymbol{\frac{3e^4}{5}-\frac{3}{5e}} & \boldsymbol{\frac{3e^4}{5}+\frac{2}{5e}}\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ [26]

Entonces:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, que:

$$B^2 = -I$$

E igualmente:

$$B^3 = B^2B = -I \cdot B = -B$$

$$B^4 = B^2B^2 = -I \cdot -I = (-I)^2 = I$$

$$B^5 = B^4B = I \cdot B = B$$

$$B^6 = B^5B = B \cdot B = B^2 = -I$$

...

Sustituyamos, entonces, en nuestro Polinomio de Taylor:

$$R(\theta) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$R(\theta) = I + \theta B + \frac{1}{2!}(\theta B)^2 + \frac{1}{3!}(\theta B)^3 \ldots$$

Y como ya sabemos lo que son las '*Bs*', entonces:

$$R(\theta) = I + \theta B - \frac{1}{2!}(\theta I)^2 - \frac{1}{3!}(\theta)^3 B + \frac{1}{4!}(\theta)^4 I + \frac{1}{5!}(\theta)^5 B - \frac{1}{6!}(\theta)^6 I \ldots$$

O sea, reordenando un poco, sacamos factor común la identidad I y B y tenemos que:

$$R(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{1}{6!}(\theta)^6 \ldots\right) I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) B$$

Y aquí vamos dejar de recorrer el camino del desarrollo de Taylor porque, mejor que alcanzar un resultado numérico concreto, podemos encontrar una identidad trigonométrica que, como era de esperar, nos va a interesar muchísimo:

---

[26] Ya sabemos que es un Generador de rotación. Si fuera de otra manera, yo qué sé: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se producirían transformaciones, ciertamente, pero ya no serán rotaciones, al menos, normales. Cuando se experimenta con esta matriz salen resultados muy chulos y curiosos. De hecho, ésta que hemos puesto y que lo cambia todo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la que se usará en Relatividad Especial.

(OBSERVACIÓN: Dicha identidad no es evidente a simple vista aunque a nada que uno lo desarrolle se empieza a comprender (téngase en cuenta que estamos tratando con funciones oscilatorias)[27]

$$\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}\dots\right)=\cos\theta$$

$$\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}\dots\right)=\sin\theta$$

Es decir, que tenemos que:

$$R(\theta)=\cos\theta\, I+\sin\theta\, B$$

O lo que es lo mismo:

$$R(\theta)=\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Es decir:

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \sin\theta\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

¡***Maravilloso***! Hemos exponenciado una matriz (hemos elevado e a una ¡¡matriz!!) y ojo a la maravilla a la que hemos llegado: justamente la misma Matriz de rotación que habíamos encontrado mediante el método trigonométrico.

Además, en todo este proceso, hemos dado con una matriz $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ que, ahora vamos a ver, es de importancia capital para las rotaciones pues es un **Generador de la Rotación**. Conocer estos generadores nos permitirá **caracterizar** el grupo al completo.

[27] Es muy fácil verlo con cualquier software que desarrolle Series de Taylor. Yo he usado Wolfram Alpha Mathematica.

-1.3-

Rotaciones en un espacio euclídeo de 3 dimensiones

$\int$

Ahora vamos a probar el mismo procedimiento pero para un espacio algo más complejo: un Espacio Euclídeo (isotrópico, bla, bla, bla…) de tres dimensiones.

Ya sabemos que:

- Una rotación *R* la podemos definir como $R = e^A$, donde
  - $R^T R = I$ (***Ortogonal***), $\det R = 1$(***Special***).
  - Estas dos propiedades implican que la matriz A (la que exponenciamos), debe ser antisimétrica, es decir: $A + A^T = 0$.
- Podemos definir una rotación en el plano xy como: $R_z(\theta) = \exp\left[\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

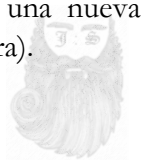
(OBSERVACIÓN: ponemos R_z porque, si rotamos estando 'contenidos', al modo de planilandia, en el plano xy, es porque lo hacemos en torno a un eje z, aunque nadie de planilandia lo vea)

Ahora queremos, como hemos dicho, aplicar esto a un espacio de tres dimensiones, es decir, vamos a realizar transformaciones del tipo SO(3) (Special Ortogonal de 3 dimensiones). Claro, lo primero que vamos a observar es que, en tres dimensiones, los vectores columna con los que vamos a trabajar son del tipo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Y, sin embargo, la matriz de rotación *R* que tenemos hasta el momento es una matriz de 2x2. Naturalmente, hay que "meterle" una dimensión más.

Eso no está tan lejos de lo que hemos hecho. Téngase en cuenta que antes ya hemos hablado en términos de $R_z(\theta)$, es decir, rotamos en un plano xy pero en torno a un eje z perpendicular al plano. Ahí ya estamos imaginando que el sistema de referencia está girando en torno al eje de esa tercera dimensión (estamos hablando, puesto que gira el sistema, de una rotación pasiva del objeto). Por ello, sólo habrá que introducir en la matriz generadora de rotación que tenemos una nueva dimensión que permanezca invariante (pues es el eje fijo en torno al cual se gira).



Para ello, lo más obvio sería añadir una fila/columna más a causa de la nueva dimensión y lo primero que se nos ocurriría, para que la z sea igual a la z', sería hacer lo siguiente:

$$R_z(\theta) = \exp\left[\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Pero… ¿Por qué hemos marcado el 1 en rojo?

Porque debe ser un cero en vez de un uno, a pesar de que, en principio, nos parezca que no debe ser así. En breve vamos a ver la explicación y la vamos a comprender con mucha facilidad. De momento baste decir que puesto que esta matriz es una matriz generadora de rotación, es decir, una matriz que multiplicará a un ángulo determinado, en el eje z, al no producirse rotación, cero rotación, no podrá aparecer ningún ángulo, sino '*0 giro*'. Si se multiplicara el ángulo por 1 tendríamos, entonces, ese giro en ese eje, y eso no debe suceder. Además, tampoco podría ser un 1 en esa posición porque, si tuviera el 1 en la diagonal (como hemos visto en la nota 23), entonces no se trataría de una matriz antisimétrica y para los generadores de rotaciones necesitamos, efectivamente, matrices antisimétricas. Es decir, debe ser:

$$R_z(\theta) = \exp\left[\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Para comprobar si este modelo que planteamos es el correcto, probémoslo haciendo una rotación infinitesimal de un ángulo ε, es decir, una rotación que sea prácticamente la identidad (quedarse como está) más un pequeñísimo giro de ángulo ε:

$$R_z(\varepsilon) \approx I + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apliquemos esta rotación a un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Sucederá que la identidad nos dejará el vector como está y, a esto, se le añadirá una rotación infinitesimal:

$$R_z(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} I + \varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$R_z(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, que nos quedará:

$$R_z(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y - \varepsilon x \\ z + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y - \varepsilon x \\ z \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: justamente ahora vemos, en rojo, por qué teníamos que poner un cero donde pensábamos que debía haber un uno. Puesto que la matriz generadora de rotación es una matriz que "multiplica" otra cosa, un ángulo, debe recoger cero para que, al realizarse el producto, no produzca nada)

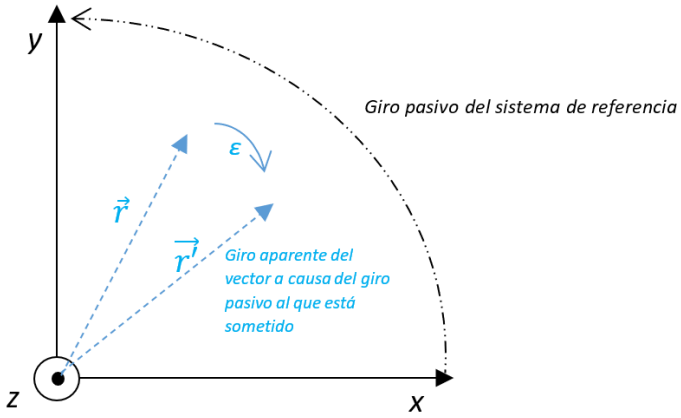
Es decir, la transformación que se produce para saltar entre x', y', z' y x, y, z será del tipo:

$$x' = x + \varepsilon y$$

$$y' = y - \varepsilon x$$

$$z = z$$

Éstas son, pues, las transformaciones que sucederían en una rotación pasiva en torno al eje z (en el esquema de abajo, el eje z está apuntando hacia nosotros).

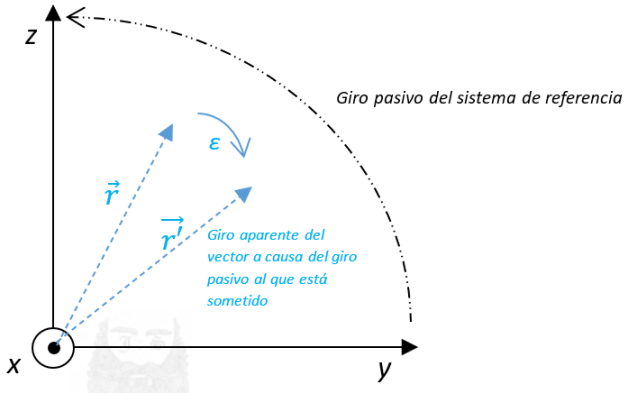


Son, además, perfectamente intuitivas si miramos el esquema de arriba. Es obvio que según el vector gira aparentemente en sentido horario hacia el eje x (recordemos que el sistema de referencia gira en sentido antihorario), digamos, la componente x va creciendo mientras que la componente y va decreciendo. En el caso de la componente x que crece, ¿quién le da lo que está ganando? Es decir, ¿en detrimento de quién crece? Pues crece en detrimento de y. Y, por supuesto lo contrario, cuando y decrece, ¿quién se lo está 'robando', quién se 'beneficia'? Obviamente, x.

Y esta transformación la hemos logrado usando un generador de rotaciones en tres dimensiones en torno al eje z que era:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow G_z$$

Hagamos ahora lo mismo en torno al eje x. Pero esta vez vamos a hacerlo mediante "el truco de los robos" que hemos usado hace un momento.



Usando, como hemos dicho, el "truco de lo de los robos", construyamos la matriz generadora de rotaciones en torno al eje x. Veamos: ¿A quién le "roba" y para crecer? A z. ¿Quién "se lleva" lo que pierde z? "Se lo lleva" y. Es decir que tenemos que:

$$x' = x$$

$$y' = y + \varepsilon z$$

$$z' = z - \varepsilon y$$

Es decir, que el generador de rotación en torno al eje x tendrá la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow G_x$$

Para que, efectivamente, tengamos:

$$R_x(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} I + \varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

$$R_x(\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x + \varepsilon 0 \\ y + \varepsilon z \\ z - \varepsilon y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + \varepsilon z \\ z - \varepsilon y \end{pmatrix}$$

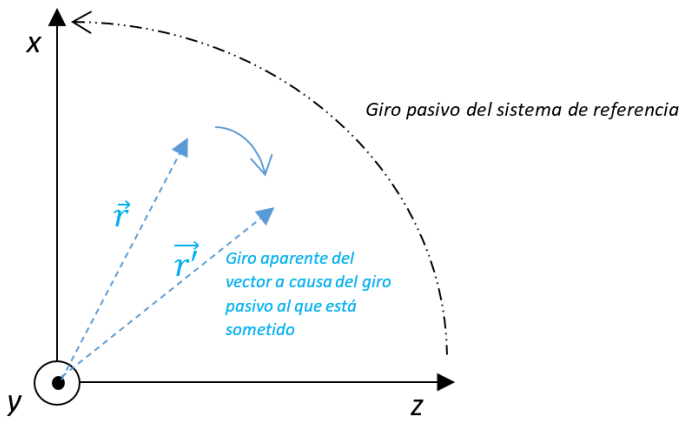
O sea, efectivamente, lo que teníamos:

$$x' = x$$

$$y' = y + \varepsilon z$$

$$z' = z - \varepsilon y$$

Por último, para rotaciones en torno al eje y, usemos el mismo "truco":



De donde podremos decir que:

$$x' = x - \varepsilon z$$

$$y' = y$$

$$z' = z + \varepsilon x$$

Que vendría de un generador de rotación del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow G_y$$

(OBSERVACIÓN: obsérvese que se conservan los ceros en la diagonal principal pues en una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal deben ser siempre cero)

Y ya tendríamos todas las matrices generadoras de rotación para cada una de las tres dimensiones:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-1.4-

Rotaciones libres en 3 dimensiones apuntando en direcciones arbitrarias

$\mathcal{S}$

¿Y si quisiéramos rotar arbitrariamente?

Recordemos que una rotación es:

$$R(\theta) = e^{A}$$

Donde la matriz A es un generador de rotación que debe ser una matriz con $det(A) = 1$ y *antisimétrica*, es decir, que cumple que su diagonal es igual a 0 y que su traspuesta es igual a ella misma · (-1) (véase nota 22). Así, a cada lado del eje diagonal compuesta por ceros, deben darse, a un lado unos elementos y al otro lado sus opuestos, es decir, algo como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, es una matriz que tiene tres parámetros libres (a, b, c y sus opuestos). Esto quiere decir que con los tres generadores de rotación que hemos deducido anteriormente (G_x, G_y, G_z), y sus opuestos, podremos operar perfectamente rotaciones en cualquier dirección arbitraria.

Así, una rotación genérica arbitraria, podremos caracterizarla como:

$$R(\theta) = \exp[matriz\ A]$$

Es decir (como ya sabemos):

$$R(\theta) = \exp[\theta B]$$

Donde la matriz antisimétrica será una combinación proporcional (según la arbitrariedad defina) de los diferentes generadores definidos previamente (y que definen perfectamente una base vectorial del espacio[28]).

$$R(\theta) = \exp\left[\theta\left(n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z\right)\right]$$

[28] Después definimos bien esto. Sin prisas. De momento nos vale hablar así. En breve se entenderá perfectamente. Si hay prisas, véanse notas 33, 34 y 35.

Esas '*enes*', a priori, podemos pensar en ellas como la *proporcionalidad* del giro, "cantidad de giro", en cada eje. ¿Qué valores adoptan? ¿Cómo condicionan los valores de esas '*enes sub algo*' el resultado?... Eso vamos a ver.

Supongamos que el ángulo que se va a girar es un infinitesimal al que llamaremos ε de manera que, como sabemos, tal giro será igual a la identidad más un giro "diferencial":

$$R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon(n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z)$$

Como sabemos que los *generadores de rotación* son:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, si desarrollamos el producto, tendremos que:

$$R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x \\ 0 & -n_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_y \\ 0 & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n_z & 0 \\ -n_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

O lo que es lo mismo:

$$R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: es fácil ver la antisimetría: diagonal 0,0,0 y lados opuestos)

Y, si dicha rotación se la aplicamos a un vector, tendremos que:

$$R_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$R_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: el producto del vector por la matriz es $x \cdot \partial_{11}, y \cdot \partial_{12}, z \cdot \partial_{13}; x \cdot \partial_{21}, y \cdot \partial_{22}, z \cdot \partial_{23}; x \cdot \partial_{31}, y \cdot \partial_{32}, z \cdot \partial_{33}$*)*

Que nos quedará:

$$R_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} x \cdot 0 & y \cdot n_z & -n_y \cdot z \\ -n_z \cdot x & y \cdot 0 & z \cdot n_x \\ x \cdot n_y & -n_x \cdot y & z \cdot 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$R_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} yn_z - n_y z \\ zn_x - n_z x \\ xn_y - n_x y \end{pmatrix}$$

Y esta última matriz de la derecha… ¿a qué recuerda?... Ok, no lo recordarás porque andarás un poco oxidado pero recuerda a un producto vectorial[29].

Así, tras ver la nota 29, ¿no será esta matriz de la que hablamos un producto vectorial de dos vectores $\vec{x} \times \vec{n}$? Donde las componentes de dichos vectores serán:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad y \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

De manera que:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \times \vec{n} = i(xn_y - yn_x) - j(xn_z - zn_x) + k(yn_z - zn_y)$$

$$\vec{x} \times \vec{n} = i(xn_y - yn_x) + j(zn_x - xn_z) + k(yn_z - zn_y)$$

Pues sí, resulta que es igual que la matriz que teníamos: $\begin{pmatrix} yn_z - n_y z \\ zn_x - n_z x \\ xn_y - n_x y \end{pmatrix}$

Es decir, que esto:

$$R_{(\varepsilon)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} yn_z - n_y z \\ zn_x - n_z x \\ xn_y - n_x y \end{pmatrix}$$

Es lo mismo que decir esto otro:

$$R_{(\varepsilon)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{n})$$

---

[29] Recordemos un par de propiedades del producto vectorial:

a) El vector resultante del producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular al plano en que se encuentran los dos vectores originales (recordemos el truco de la mano derecha: giro de cierre y pulgar hacia arriba).
b) El producto vectorial incluye la propiedad antisimétrica:

$$\vec{a}x\vec{b} = \vec{c}$$
$$\vec{b}x\vec{a} = \overrightarrow{-c}$$

¿Cómo se hacía un producto vectorial? Rápidamente lo esbozamos mediante un truquillo. Supongamos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con sus componentes i, j, k, es decir:

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

La componente i del vector resultante será el resultado de calcular el determinante de la matriz adjunta al elemento i (∂_{11}) (y así con cada componente en la forma $' + i - j + k'$), es decir:

$$\vec{a}x\vec{b} = i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Ó

$$\vec{b}x\vec{a} = -i(a_2b_3 - a_3b_2) + j(a_1b_3 - a_3b_1) - k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Es decir, que sería:

$$R_{(\varepsilon)}\vec{x} \approx \vec{x} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{n})$$

Para ver si estamos haciendo lo correcto, probemos a hacer, con este modelo que sirve para una rotación arbitraria en cualquier dirección, una rotación en torno a un solo eje, por ejemplo, el eje x. Así tendríamos:

$$R_{(\mathrm{x})}(\varepsilon) \approx \vec{x} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{n})$$

Donde el vector $\vec{n}$ se define, obviamente, mediante las siguientes componentes (sólo una "viva"):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De manera que:

$$(\vec{x} \times \vec{n}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ n_x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es:

$$(\vec{x} \times \vec{n}) = i(y \cdot 0 - z \cdot 0) - j(x \cdot 0 - zn_x) + k(x \cdot 0 - yn_x)$$

O lo que es lo mismo ajustando el signo negativo de la componente j:

$$(\vec{x} \times \vec{n}) = i(y \cdot 0 - z \cdot 0) + j(x \cdot 0 + zn_x) + k(x \cdot 0 - yn_x)$$

Es decir:

$$(\vec{x} \times \vec{n}) = (0, zn_x, -yn_x)$$

Por lo que tenemos que:

$$R_{(\mathrm{x})}(\varepsilon) \approx \vec{x} + \varepsilon(0, zn_x, -yn_x)$$

Sacando factor común:

$$R_{(\mathrm{x})}(\varepsilon) \approx \vec{x} + \varepsilon n_x(0, z, -y)$$

Y esto debe ser igual (pues hemos dicho que rotamos sólo en torno al eje de las x) a:

$$R_{(\mathrm{x})}(\varepsilon) \approx \vec{x} + \varepsilon n_x(0, z, -y) \leftrightarrow\ R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon(n_x G_x)$$

Y, si recordamos qué era $G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, observamos que, efectivamente, tenemos un 0 en las x, un 1 en las z y un -1 en las y, es decir, que n_x multiplica a un $(0, z, -y)$. Por lo que podremos decir que, efectivamente:

$$R_{(\varepsilon)}\vec{x} \approx \vec{x} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{n})$$

Funciona perfectamente. Y, además, funcionará igualmente bien, con las adaptaciones pertinentes, para giros paralelos al eje y o al eje z.

Ahora bien, para que esto se cumpla:

$$R_{(x)}(\varepsilon) \approx \vec{x} + \varepsilon n_x(0, z, -y) \leftrightarrow R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon(n_x G_x)$$

Necesitamos que:

$$\varepsilon n_x \quad debe\ ser\ igual\ a\ \varepsilon$$

Y para ello tiene que suceder que el valor de n_x debe ser igual a 1, es decir, su módulo, el módulo del vector n_x (y en el caso de la rotación arbitraria $\vec{n}$) debe ser 1.

Esto no es que el vector $\vec{n}$ tenga componentes (1,1,1), no, pues eso implicaría un vector que apunta en una dirección de 45º a todos los ejes, sino que el vector $\vec{n}$ debe ser el vector unitario, con módulo igual a 1: $|\vec{n}| = 1$[30], a saber: $\hat{n}$[31].

Luego, en definitiva, podemos definir la rotación arbitraria como:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta\left(n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z\right)\right]$$

Es decir:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta \cdot \hat{n} \cdot \vec{G}\right]$$ [32]

---

[30] Por ejemplo, para calcular el vector unitario, $\hat{v}$, de un vector $\vec{v}$ de componentes $(3,4)$ se procede mediante $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, es decir, por un lado hay que calcular, por Pitágoras, el módulo $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$, a saber, en el caso que nos ocupa: $|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$ y, posteriormente, siguiendo: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rightarrow \hat{v} = \frac{(3,4)}{5}$ de manera que, el vector unitario $\hat{v}$ será igual $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y su módulo, el de $\hat{v}$ por su propia definición intrínseca, siempre será igual a 1 ($|\hat{v}| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = 1$).

[31] $\hat{n}$, vector unitario, con dirección y sentido arbitrario y de módulo 1.

[32] Llegados a este punto vamos a abordar algunos fundamentos, aunque sean rudimentarios, del Álgebra de Lie. Para ello empecemos por suponer que tenemos 2 rotaciones:

$$R_1 = e^A$$
$$R_2 = e^B$$

Donde *A* y *B* son matrices que representan un cierto ángulo o un cierto eje de rotación o lo que sea y, esto es lo importante, son diferentes.
Ahora nos preguntaremos si es lo mismo rotar R_1 por R_2 o viceversa, es decir, si el producto es conmutativo:

$$R_1 R_2 \text{¿} = ? R_2 R_1$$

A priori, podremos decir que no, puesto que ya definimos que los elementos de nuestro grupo de rotaciones no conmutaban y que, por lo tanto, el grupo no era Abeliano.
Vamos a estudiar ahora '*cuánto se aleja el grupo de la conmutatividad*' si es que pudiéramos hablar en estos términos. ¿Cuánto cambia el resultado al cambiar el orden de los factores del producto?

Para ello, y como ya estamos acostumbrados a hacer, lo primero que vamos a hacer es caracterizar la rotación como, aproximadamente, la *Identidad* más una rotación de un ángulo infinitesimal, a saber:

$$R_1 \approx I + A$$
$$R_2 \approx I + B$$

Ahora, como siempre, empecemos con una *secuencia de sustituciones*:

$$R_1 R_2 \approx (I + A)(I + B)$$
$$R_1 R_2 \approx I + A + B + AB$$

Y, cambiando el orden de los factores:

$$R_2 R_1 \approx I + B + A + BA$$

Para ver en qué se diferencia, procedamos a restar los resultados obtenidos ya que, si la diferencia fuera igual a cero, necesariamente ambas magnitudes serían idénticas y, por lo tanto, el producto sí sería conmutativo:

$$R_1 R_2 - R_2 R_1 = I + A + B + AB - (I + B + A + BA)$$

Como es más que obvio, todo se va con todo excepto una cosa (recordemos que debemos dar por sentado que el grupo no es conmutativo por lo tanto no es lo mismo $A \cdot B$ que $B \cdot A$):

$$R_1 R_2 - R_2 R_1 = AB - BA$$

Que justamente es la definición de lo que se denomina en el Álgebra de Lie un *Conmutador*, donde *A* y *B* son matrices u operadores…:

$$Conmutador\ de\ dos\ matrices: [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$$

Donde (y estas son algunas propiedades importantes de los conmutadores):

1- $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = -[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}]$

2- $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}] = A(B + C) - (B + C)A \rightarrow$
$AB + AC - BA - CA \rightarrow AB - BA + AC - CA \rightarrow [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}]$

3- $[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}] = (A + B)(C + D) - (C + D)(A + B) \rightarrow$
$AC + AD + BC + BD - CA - CB - DA - DB \rightarrow$
$AC - CA + AD - DA + BC - CB + BD - DB \rightarrow [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}] + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}] + [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] + [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}]$

4- $[\boldsymbol{3A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{3}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ *o también* $[\boldsymbol{3A}, \boldsymbol{2B}] = \boldsymbol{6}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$

Donde, aplicado al caso que nos ocupaba antes de comenzar esta nota al pie, *A* y *B* serán matrices del tipo: $G_x, G_y, G_z, \ldots$

(importante, añadir explicaciones sobre la fórmula de Baker-Campbell-Haysdorff y cómo el producto de las matrices no es tan simple como lo he puesto (ver O-big-note que se anula por ser casi cero…, Manual 12ª segunda ss. y vídeo vi, minuto aprox y previo… abordar las constantes de estructura de grupo….)

Así, según venimos diciendo, podremos expresar la diferencia de dos productos entre dos rotaciones como un conmutador, es decir:

$$R_1R_2 - R_2R_1 = [A, B]$$

Donde, como ya hemos adelantado, si las matrices *A* y *B* no conmutan, tendremos que:

$$[A, B] \neq 0$$

(OBSERVACIÓN: si conmutara tendríamos, obvio, que $[A, B] = 0, es\ decir\ que\ R_1R_2 = R_2R_1$*)*

La cosa será, entonces: '*¿en qué grado conmutan?*', '*¿cómo conmutan para que al final el cambio de orden produzca resultados diferentes?*' porque, precisamente, Sophus Lie se percató de que estudiando cómo conmutan estos productos, es decir, estudiando qué cambios se producían al cambiar el orden de los factores de un producto de matrices que son elementos de un grupo, se accede justamente a las propiedades del grupo al completo.

Para ver realmente cómo va éste asunto calculemos los conmutadores de lo que estudiábamos en nuestro hilo principal:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta \cdot \hat{n} \cdot \vec{G}\right]$$

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, si tenemos que conmutar algo del tipo:

$$R_1 = e^A$$
$$R_2 = e^B$$

Donde:

$$A = \theta_1\left(n_1G_x + n_2G_y + n_3G_z\right)$$
$$B = \theta_2\left(n'_1G_x + n'_2G_y + n'_3G_z\right)$$

Nos quedará un conmutador $[A, B]$ igual a:

$$[\theta_1\left(n_1G_x + n_2G_y + n_3G_z\right), \theta_2\left(n'_1G_x + n'_2G_y + n'_3G_z\right)]$$

Que, por las propiedades 3ª y 4ª que antes hemos recogido, podremos reescribir como:

$$[A, B] = \theta_1\theta_2([n_1G_x, n'_1G_x] + [n_1G_x, n'_2G_y] + [n_1G_x, n'_3G_z] + [n_2G_y, n'_1G_x] + [n_2G_y, n'_2G_y] + \cdots)$$

Que podemos seguir factorizando del siguiente modo:

$$[A,B] = \theta_1\theta_2(n_1{n'}_1[G_x,G_x] + n_1{n'}_2[G_x,G_y] + n_1{n'}_3[G_x,G_z] + n_2{n'}_1[G_y,G_x] + n_2{n'}_2[G_y,G_y] + \cdots)$$

Que, de forma general podemos expresar como:

$$[A,B] = \theta_1\theta_2 \sum_{i,j=1}^{3} n_i{n'}_j[G_i,G_j]$$

¿Cómo conmuta esto que estamos manejando? Veamos.

Si tenemos dos matrices aleatorias cualesquiera, por ejemplo, *A* y *B* y las conmuto, llegaré, por ejemplo, a una matriz *C* cualquiera:

$$[A,B] = C$$

Pero, en cambio, si establecemos, puesto que estamos hablando de rotaciones, que tanto *A* como *B* son matrices antisimétricas, es decir que:

$$A^T = -A \quad y \quad B^T = -B$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad que\ es = -A$$

Entonces, ¿qué será la matriz *C*? Veámoslo.

$$[A,B] = C$$
$$AB - BA = C$$

Traspongamos:

$$(AB - BA = C)^T$$

Que es:

$$(AB)^T - (BA)^T = C^T$$

(As bajo la manga) Como sabemos que la traspuesta de un producto se resuelve invirtiendo el producto y haciendo la traspuesta de cada elemento:

$$B^TA^T - A^TB^T = C^T$$

Y como ya hemos dicho antes, al ser matrices antisimétricas, podemos expresarlo como:

$$(-B)(-A) - (-A)(-B) = C^T$$

(OBSERVACIONES: obviamente, C traspuesta aún no sabemos lo que es, así que lo dejamos como está)

Que, evaluando los signos, es:

$$BA - AB = C^T$$

Que, por la propiedad 1ª de los conmutadores que definimos antes, podemos reescribir como:

$$-[A,B] = C^T$$

Pero sabemos que:

$$[A,B] = C$$

Luego, sustituyendo, tenemos que:

$$-[A,B] = C^T \rightarrow -C = C^T$$

A saber, que *C* también es una matriz antisimétrica.

Es decir, que si conmutamos matrices antisimétricas obtenemos, también, una matriz antisimétrica. Así, en nuestro caso, conmutando dos matrices antisimétricas, por ejemplo:

$$[G_1, G_2]$$

(OBSERVACIÓN: como los subíndices se pueden ir incrementando, sustituimos x por 1, y por 2, z por 3, …)

Obtendremos:

$$[G_1, G_2] = C_{121}G_1 + C_{122}G_2 + C_{123}G_3$$

(OBSERVACIÓN: ¿Por qué "juguetear" con G_1 y G_2 produce resultados en G_1, G_2 y G_3? Es obvio, puesto que estamos en un espacio de tres dimensiones, el modo en que relacionemos dos de ellas debe afectar a un resultado que se manifiesta en 3 dimensiones (aunque una de ellas, en algunos casos, sea 'cero manifestación')

Donde C_{12j} es un cierto número al que hemos puesto subíndice 12 por estar aplicándose al conmutador con subíndices 1 y 2 ($[G_1, G_2]$) y el subíndice j '*en honor*' al subíndice de la matriz sobre la que se aplica, de manera que podemos reescribir como un sumatorio del tipo:

$$[G_1, G_2] = \sum_{j=1}^{3} C_{12j}G_j$$

Más generalmente:

$$[G_i, G_j] = \sum_{i,j=1}^{k} C_{ijk}G_k$$

Esto es la "Constante de Estructura".

Esta forma se puede quedar perfectamente así en un "mundo" de rotaciones $SO\,(3)$ donde se están manejando números reales pero, puesto que esta estructura algebraica se usa también para entornos complejos (por ejemplo en *Mecánica Cuántica*) esta formulación queda incompleta si no se le añade una componente imaginaria, por lo que la "constante de Estructura" queda, definitivamente, como:

$$[G_i, G_j] = i \sum_{i,j=1}^{k} C_{ijk}G_k$$

Donde el 'i' que hemos marcado en rojo es una componente compleja, imaginaria.

En el caso que nos ocupa ($SO\,(3)$) no requiere componente imaginaria, por lo que podremos trabajar perfectamente como:

$$[G_i, G_j] = \sum_{i,j=1}^{k} C_{ijk} G_k$$

Y ahora vamos a calcular qué número es ése que se oculta tras C_{ijk} (realmente va a oscilar sólo entre -1 y 1). Para verlo más claro vamos a verlo desarrollándolo con un ejemplo concreto.

Así, siendo que (recordemos que hemos cambiado subíndices: $x = 1, y = 2, z = 3$):

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Empecemos a conmutar:

- $[G_1, G_1]$ *que obviamente será igual a cero* $\rightarrow [G_1, G_1] = 0$

- $[G_1, G_2] = G_1 G_2 - G_2 G_1$, desarrollémoslo:

$$[G_1, G_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: recordemos que el producto entre matrices se resuelve, por ejemplo, para el elemento ∂_{12} de la matriz resultante, sumando el producto, de la fila 1, elemento contra elemento, de la matriz 1 con los elementos de la columna 2 de la matriz 2).

Es decir:

$$[G_1, G_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: restado elemento a elemento)

$$[G_1, G_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$[G_1, G_2] = -G_3$$

- $[G_1, G_3] = G_1 G_3 - G_3 G_1$, desarrollémoslo:

$$[G_1, G_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[G_1, G_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G_2$$

- …

- En definitiva, los resultados que tenemos son:

$$[G_1, G_1] = 0$$
$$[G_1, G_2] = -G_3$$
$$[G_1, G_3] = G_2$$
$$[G_2, G_1] = G_3$$
$$[G_2, G_2] = 0$$
$$[G_2, G_3] = -G_1$$
$$[G_3, G_1] = -G_2$$
$$[G_3, G_2] = G_1$$
$$[G_3, G_3] = 0$$

Esto son '*casi*' las "*constantes de estructura*", pues nos faltaría incluir la 'i' compleja. Además nos falta conocer el número C_{ijk}.

Para ello vamos estudiar el conmutador $[G_1, G_2]$, del que ya sabemos que:

$$[G_1, G_2] = -G_3$$

En realidad, como ya podemos imaginar, nos falta introducir algo entre el signo negativo y el G_3, así que mejor vayamos dejando un hueco que necesitamos rellenar:

$$[G_1, G_2] = -[\ \ ]G_3$$

Por otro lado, vamos a introducir una convención que nos conviene para dar forma a las expresiones que buscamos. Así, estaremos de acuerdo en que podemos definir el número 1 como:

$$1 = i \cdot (-i)$$

(OBSERVACIÓN: puesto que $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \rightarrow \sqrt{-1} \cdot (-\sqrt{-1}) = 1$*)*

Por lo que podremos expresar:

$$[G_1, G_2] = -G_3$$

Como:

$$[G_1, G_2] = -[i \cdot (-i)]G_3$$

Así, si llamamos a:

$$(-i)G_3 = J_3$$

Tendremos que:

$$[G_1, G_2] = -i \cdot J_3$$

Si usamos la misma convención que hemos usado para G_3 para G_1 y G_2, tendríamos que:

$$(-i)G_1 = J_1 \rightarrow G_1 = \frac{J_1}{(-i)}$$

$$(-i)G_2 = J_2 \rightarrow G_2 = \frac{J_2}{(-i)}$$

Podríamos exponer entonces que siendo:

$$[G_1, G_2] = -i \cdot J_3$$

$$G_1 G_2 - G_2 G_1 = -i \cdot J_3$$

Que podemos sustituir como:

$$\frac{J_1}{(-i)} \cdot \frac{J_2}{(-i)} - \frac{J_2}{(-i)} \cdot \frac{J_1}{(-i)} = -i \cdot J_3$$

Que nos queda como:

$$\frac{1}{(-i)^2} \cdot (J_1 \cdot J_2) - \frac{1}{(-i)^2} \cdot (J_2 \cdot J_1) = -i \cdot J_3$$
$$\frac{1}{\left(-\sqrt{-1}\right)^2} \cdot (J_1 \cdot J_2) - \frac{1}{\left(-\sqrt{-1}\right)^2} \cdot (J_2 \cdot J_1) = -i \cdot J_3$$
$$\frac{1}{-\left(\sqrt{-1}\right)^2} \cdot (J_1 \cdot J_2) - \frac{1}{-\left(\sqrt{-1}\right)^2} \cdot (J_2 \cdot J_1) = -i \cdot J_3$$
$$-J_1 J_2 + J_2 J_1 = -i \cdot J_3$$

Que, ajustando signos es:

$$J_1 J_2 - J_2 J_1 = i \cdot J_3$$

Que, finalmente es lo mismo que decir:

$$[J_1, J_2] = iJ_3$$

De manera que, reformulando lo que teníamos, nos aporta las ***Constantes de Estructura*** del Grupo, esta vez, sí, definitivas:

$$[G_1, G_1] = 0 \rightarrow [J_1, J_1] = 0$$
$$[G_1, G_2] = -G_3 \rightarrow [J_1, J_2] = iJ_3$$
$$[G_1, G_3] = G_2 \rightarrow [J_1, J_3] = -iJ_2$$

$$
\begin{array}{ccc}
[G_2, G_1] = G_3 & \rightarrow & [J_2, J_1] = -iJ_3 \\
[G_2, G_2] = 0 & \rightarrow & [J_2, J_2] = 0 \\
[G_2, G_3] = -G_1 & \rightarrow & [J_2, J_3] = iJ_1 \\
[G_3, G_1] = -G_2 & \rightarrow & [J_3, J_1] = iJ_2 \\
[G_3, G_2] = G_1 & \rightarrow & [J_3, J_2] = -iJ_1 \\
[G_3, G_3] = 0 & \rightarrow & [J_3, J_3] = 0
\end{array}
$$

Por otro lado, y arrimando el ascua a nuestra solución definitiva, observemos, pues nos va a ser útil después, que $\frac{1}{-i} = i$, puesto que si multiplicamos por "i" en ambos lados de la ecuación tenemos que:

$$\left(\frac{1}{-i} = i\right) i \rightarrow \frac{i}{-i} = i^2 \rightarrow \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow -1 = -1$$

De manera que podremos decir sobre toda 'G_{sub}' que:

$$G_{sub} = \frac{J_{sub}}{-i} \; implica \; por \; lo \; anterior \; que: \frac{J_{sub}}{-i} = i \cdot J_{sub}$$

Y que, ahora, todo esto nos va a permitir presentar las rotaciones, esta vez pudiendo extendernos a los números complejos (imprescindible en *Mecánica Cuántica*), como:

$$R(\theta) = \exp[i \cdot \theta \cdot \hat{n} \cdot J]$$

Esto implica que donde antes teníamos:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es importante porque en cuántica tendremos dos tipos de matrices (u operadores):

- Matrices HERMÍTICAS: que están asociadas a las magnitudes de los observables de la naturaleza (velocidad, energía, cantidad de movimiento, …).
  Una matriz A es HERMÍTICA si al hacer la traspuesta de dicha matriz y después tomar los ***conjugados*** de cada elemento de la matriz traspuesta para construir una nueva matriz, finalmente, coincide con la matriz original, entonces se trata de una matriz HERMÍTICA. Es decir: $(A)^{T*} = A$.

*(OBSERVACIÓN: el **conjugado** de un número complejo es, por ejemplo:* $(2 + 3i)^* = 2 + 3(-i) = 2 - 3i$*, cambiar el signo de la parte compleja).*

(OBSERVACIÓN 2: a esto $(A)^{T*}$*, para ahorrar tiempo se le suele llamar "A daga" que es:* $A^\dagger$*, sí, una daga)*

Que podemos desarrollar mediante las series de Taylor, tal y como hicimos en el caso de la rotación bidimensional, para acabar construyendo la matriz de rotación que da cuenta de esta rotación tridimensional arbitraria.

- Matrices UNITARIAS: que nos dan la evolución temporal o dinámica y la simetría en Mecánica Cuántica. Una matriz UNITARIA es aquella que cumple que su traspuesta conjugada por ella misma es la IDENTIDAD. Es decir, que: $U^{\dagger} \cdot U = I$.

Y aquí es donde está la utilidad de todo esto que hemos desarrollado en esta nota: que si bien G_1, G_2, G_3 no son matrices hermíticas, resulta que J_1, J_2, J_3 sí que lo son (se puede comprobar fácilmente y, además, son también unitarias).

En definitiva, para concluir esta importante, y compleja, nota, podemos resumir que:

$$[J_i, J_j] = iC_{ijk}J_k$$

Es decir, aplicado a nuestro caso:

$$[J_1, J_1] = i(C_{111}J_1 + C_{112}J_2 + C_{113}J_3) = 0$$

Donde C_{111}, C_{112} y C_{113} son iguales a cero, pues son linealmente independientes (ojo, las C_{ijk}).

Pero en el caso de:

$$[J_1, J_2] = iJ_3$$

Es decir:

$$[J_1, J_2] = i(C_{121}J_1 + C_{122}J_2 + C_{123}J_3)$$

Donde:

$$C_{121} = 0$$
$$C_{122} = 0$$
$$C_{123} = 1$$

Es decir:

$$[J_1, J_2] = iJ_3$$

A la hora de estudiar estos operadores:

$$C_{121}, C_{111}, C_{123}, \dots$$

Se usa el término:

$\boldsymbol{\varepsilon_{ijk}}$ que se le llama el símbolo de Levi-Civita

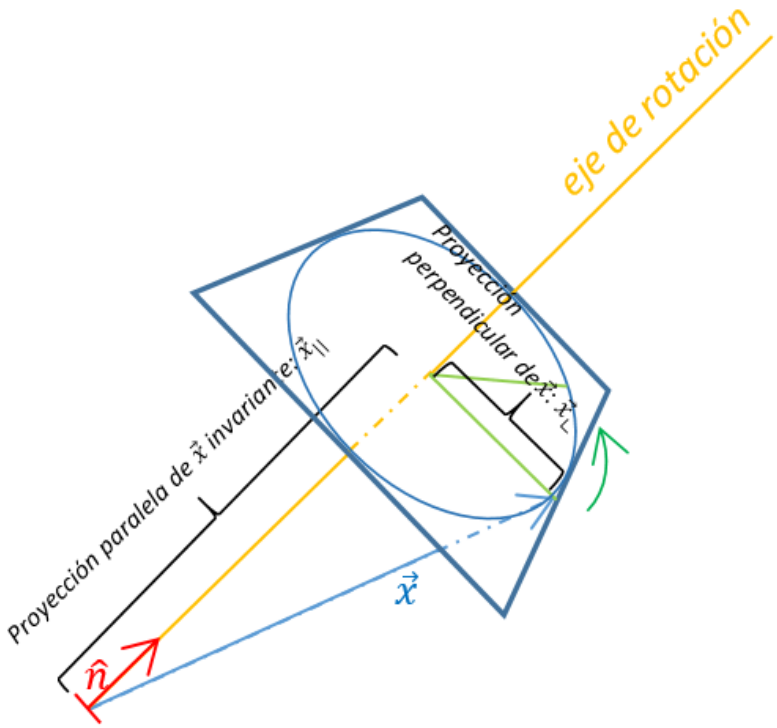
Donde resulta que si se repite algún índice en ε el valor es 0; si todos los subíndices son diferentes el valor es 1 y -1 si son diferentes pero el orden está cambiado.

El desarrollo de dicha exponencial es, sin embargo, demasiado laborioso por lo que, mejor, retengamos esto en nuestra cabeza (es decir, ya sabemos el procedimiento estructural que hay que seguir) pero, para evitar desarrollos largos y tediosos aportemos ahora un modo más simple de alcanzar el mismo resultado pensando un poco en cómo va a rotar el vector en torno a un eje arbitrario. Es menos laborioso y, de camino nos va a servir para conocer algunos conceptos que nos van a ser muy útiles en nuestras investigaciones. Desarrollémoslo.

Vamos a demostrar que un vector rotado un cierto ángulo θ en torno a un eje que contiene un vector unitario $\hat{n}$ se puede definir como:

$$\overrightarrow{x'} = R(\hat{n}, \theta)\vec{x}$$

El escenario es el siguiente:



- En naranja el eje en torno al cual se produce la rotación y que es, naturalmente, paralelo (y '*contiene*') al…
- Vector unitario $\hat{n}$ marcado en rojo.
- Vector $\vec{x}$, en azul, que rota en torno al eje. Cuando este vector rote, por ejemplo 360º, '*la punta de la flecha*' del vector dibujará un círculo en el plano que hemos dibujado.

Lo que podemos observar es que el vector $\vec{x}$ tendrá dos componentes:

a. Componente paralela al eje que permanecerá invariante. Llamémosla $\vec{x}_{||}$
b. Componente perpendicular al eje que cambiará con el giro. Llamémosla $\vec{x}_{\perp}$

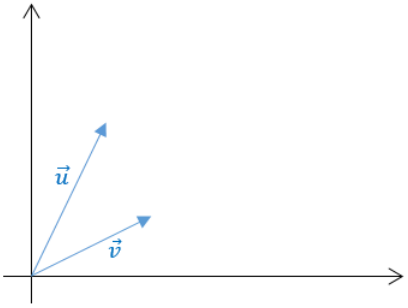
En tal caso podremos definir el vector $\vec{x}$ como la suma de otros dos vectores[33]:

[33] Operaciones básicas con vectores.

1) Suma de vectores.

Supongamos que tenemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se definen como:

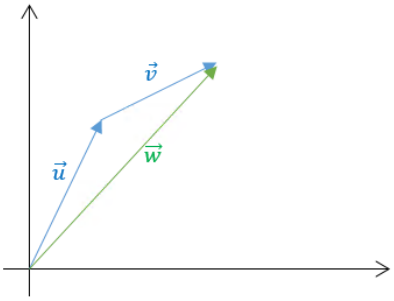
· $\vec{u} = (1,3)$ · $\vec{v} = (2,1)$



La suma de los vectores será un vector resultante $\vec{w}$:

· $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \rightarrow (1,3) + (2,1) = (3,4) \rightarrow \vec{w} = (3,4)$

Que geométricamente lo podríamos imaginar como:

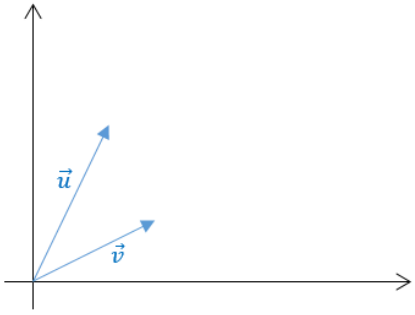


Observemos que, como truco, la cola del vector $\vec{v}$ se conecta (manteniendo, obviamente, su dirección original) con la cabeza del vector $\vec{u}$.

2) Resta de vectores.

Supongamos los mismos vectores que en el caso anterior de la suma:

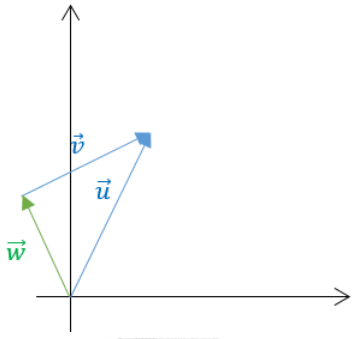
· $\vec{u} = (1,3)$ · $\vec{v} = (2,1)$



La resta de los vectores será un vector resultante $\vec{w}$:

· $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} \rightarrow (1,3) - (2,1) = (-1,2) \rightarrow \vec{w} = (-1,2)$

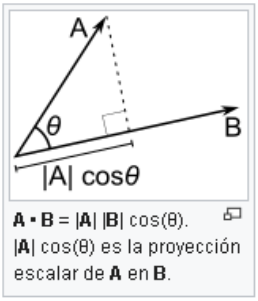
Que geométricamente podríamos imaginar como:



Observemos que, como truco, la cabeza del vector $\vec{v}$ se conecta (manteniendo, obviamente, su dirección original), con la cabeza del vector $\vec{u}$.

3) Producto escalar entre vectores.

En este caso lo que se hará es una proyección de un vector sobre el otro y, para ello, habrá que considerar el ángulo que forman los vectores de manera que el resultado será:



A • **B** = |**A**| |**B**| cos(θ).
|**A**| cos(θ) es la proyección escalar de **A** en **B**.

Expresión analítica del producto escalar

Si los vectores **A** y **B** se expresan en función de sus componentes cartesianas rectangulares, tomando la base canónica en $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores unitarios i , j , k tenemos:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

El producto escalar se realiza como un producto matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Así, generalizando para un espacio de n dimensiones

si **A** y **B** son vectores o puntos en un espacio $\mathbb{R}^n$ entonces:

el producto escalar se realizaría como un producto matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n \end{bmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_nB_n$$

Es interesante recordar que el producto escalar da como resultado, un escalar.

4) Producto vectorial entre vectores.

Sean dos vectores **a** y **b** en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial entre **a** y **b** da como resultado un nuevo vector, **c**. El producto vectorial **a** y **b** se denota mediante **a** × **b**, por ello se lo llama también *producto cruz*. En los textos manuscritos, para evitar confusiones con la letra **x** (equis), es frecuente denotar el producto vectorial mediante:[1]

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

El producto vectorial puede definirse de una manera más compacta de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta)\,\hat{\mathbf{n}}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario y ortogonal a los vectores **a** y **b** y su dirección está dada por la regla de la mano derecha y θ es, como antes, el ángulo entre **a** y **b**. A la regla de la mano derecha se la llama a menudo también regla del sacacorchos.

Precisiones [editar]

Se denomina producto vectorial del vector **a** por el vector **b** [2] al vector denotado por $a \times b$ y definido por las tres exigencias siguientes:

- el módulo de $a \times b$ es igual al módulo de **a** por módulo de **b** por $sen\phi$, en donde ϕ es el ángulo orientado formado por los vectores **a** y **b**
- el vector $a \times b$ es perpendicular a cada uno de los vectores **a** y **b**
- la dirección del vector $a \times b$ respecto a los vectores **a** y **b** es igual que la del eje coordenado Oz respecto a los ejes coordenados Ox y Oy, como si girase de Ox a Oy y avanzase en la dirección positiva de Oz.

Producto vectorial de dos vectores [editar]

Sean los vectores concurrentes de $\mathbb{R}^3$, el espacio afín tridimensional según la base anterior. Se define el producto:

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}$$

Donde **w** es el producto vectorial de **u** y **v**, definido así:

$$\begin{aligned} \times : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

donde la última fórmula se interpreta como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_yv_z - u_zv_y)\mathbf{i} + (u_zv_x - u_xv_z)\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\mathbf{k}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_{\llcorner}$$

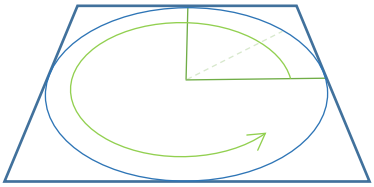
(OBSERVACIÓN: tenemos un vector $\vec{x}$ que es la suma de otros dos vectores. No confundir con sus componentes. $\vec{x}$ es la suma, "cabeza con cola", de otros dos vectores)

Cuando empecemos a realizar la rotación sucederá que:

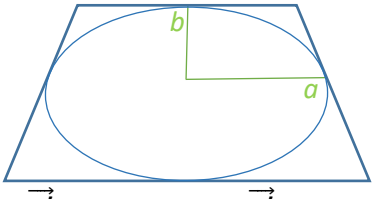
$$\overrightarrow{x'} = \vec{x}_{||} + \overrightarrow{x'}_{\llcorner}$$

Es decir, el vector rotado ($\overrightarrow{x'}$) seguirá conservando entre sus sumandos el mismo vector paralelo ($\vec{x}_{||}$) que antes del giro pues, dicho '*subvector*', no cambia, mientras que el vector perpendicular habrá sufrido alguna transformación ($\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$). ¿Qué tipo de transformación?

Analicemos específicamente el comportamiento del vector $\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$ en el plano que lo contiene viéndolo como un plano picado.



Naturalmente, cuando el vector $\vec{x}$ gire se producirá un "intercambio de cantidades" en el vector $\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$ que se "repartirá" entre los dos ejes que conforman el plano (llamémosles a y b, no vamos a usar x e y porque, recordemos, la rotación es arbitraria y el plano va '*a lo loco*', sin coincidir *necesariamente* con los ejes x e y de referencia que pudiéramos haber establecido en un inicio):



Así, es obvio, la componente $\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$ del vector $\overrightarrow{x'}$ tendrá, a su vez, dos componentes definidas en a y en b. Y, para tales ejes, podremos definir vectores unitarios $\hat{a}$ y $\hat{b}$:

---

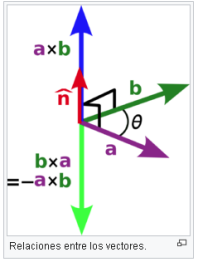
esto es:

$$w_x = u_y v_z - u_z v_y$$
$$w_y = u_z v_x - u_x v_z$$
$$w_z = u_x v_y - u_y v_x$$

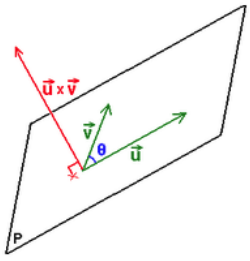
Usando una notación más compacta, mediante el desarrollo por la primera fila de un determinante simbólico de orden 3 (simbólico ya que los términos de la primera fila no son escalares):

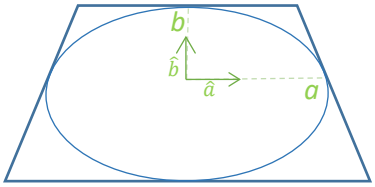
$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}$$

Que da origen a la llamada regla de la mano derecha o regla del sacacorchos: girando el primer vector hacia el segundo por el ángulo más pequeño, la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es el de un sacacorchos que gire en la misma dirección.



Relaciones entre los vectores.





Es decir que $\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$ será algo así como:

$$\overrightarrow{x'}_{\llcorner} = ¿\,qué\ cantidad?\cdot \hat{a} + ¿\,qué\ cantidad?\cdot \hat{b}$$

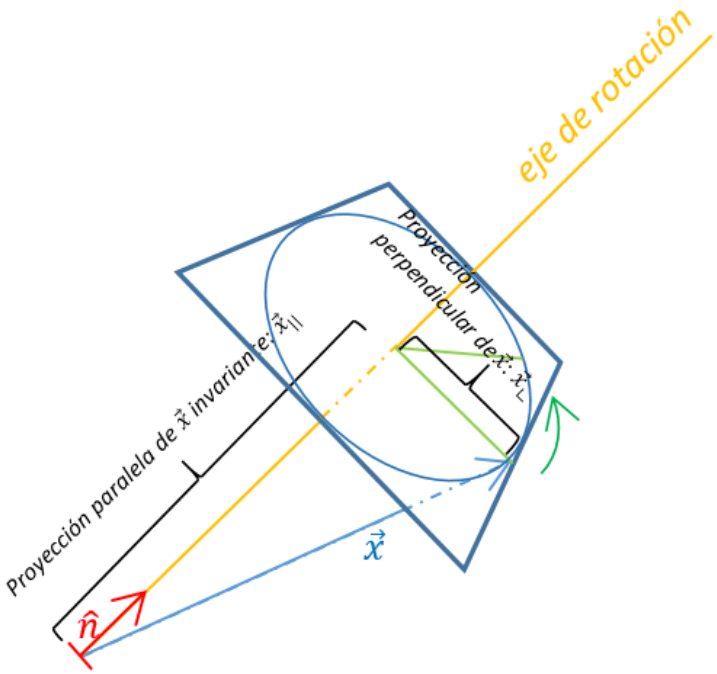
De manera que el vector $\overrightarrow{x'}$ (el rotado) sería algo parecido a:

$$\overrightarrow{x'} = \vec{x}_{||} + \overrightarrow{x'}_{\llcorner} \rightarrow \overrightarrow{x'} = \vec{x}_{||} + (¿\,qué?\cdot \hat{a} + ¿\,qué?\cdot \hat{b})$$

(OBSERVACIÓN: obviamente esos "*qué cantidad*" serán componentes del vector, es decir, el módulo del vector · el vector unitario que marca la dirección · el coseno o el seno del ángulo que se gire)

Es decir, como realmente, en la rotación del vector $\vec{x}$ *hacia* $\overrightarrow{x'}$, la componente paralela ($\vec{x}_{||}$) permanece fija, la rotación del vector $\vec{x}$ se puede estudiar como la rotación de su componente perpendicular $\vec{x}_{\llcorner}$ en dos dimensiones.

Recapitulemos y analicemos el esquema inicial:



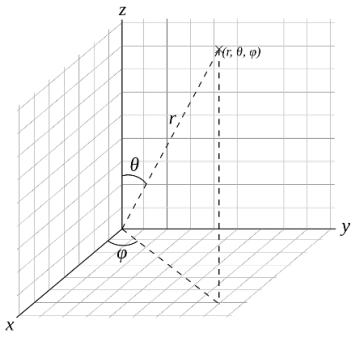
¿Cómo vamos a proceder?[34]

[34] Llevamos demorando, tanto como ha sido posible, incluir una serie de nociones sobre vectores y espacios vectoriales, pero ya es imposible aplazarlo más. Incluimos en la presente nota un pequeño apéndice en el que se resumen, de la manera más rápida, rigurosa e inteligible posible, una serie de nociones cuyo conocimiento y comprensión es fundamental para poder seguir avanzando. En todo caso, hemos esperado lo suficiente como para que la explicación que se dé tenga aplicación inmediata sobre nuestro objeto de estudio.
Téngase en cuenta que, como se hace habitualmente, podríamos haber hecho mención de todo el aparato conceptual necesario al principio del texto, de manera preliminar y por separado al desarrollo de los conceptos aplicados y, después, según se va haciendo referencia a ello remitirnos a dichas secciones introductorias tal y como se hace habitualmente en todos los manuales. Sin embargo, como hemos comentado, la filosofía de este texto no es, en absoluto, la de un manual al uso. En este caso, nuestro objetivo es empezar "casi desde cero" e ir avanzando poco a poco, desviándonos "por las ramas oportunas" cada vez que nos surja la necesidad de ello. Hemos procedido así por dos motivos fundamentales:

- Queremos plasmar en este texto una guía para comprender determinados fenómenos físicos sin tener que pasar el engorro de ir dando saltos entre páginas y referencias a cosas estudiadas en otro momento y de las que, probablemente, cuando las necesitemos habremos olvidado.
- Creemos que hacer referencia a una determinada "necesidad conceptual" justo en el momento en que hace falta sirve para poder hacer un mejor y más lúdico acercamiento a los elementos necesarios dentro de su contexto.

Así, como decíamos, fieles a nuestro plan, vamos a abordar, con algo más de detalle algunos conceptos en torno a los vectores y espacios vectoriales cuyo conocimiento es absolutamente necesario para comprender las siguientes fases del desarrollo.

Para comenzar imaginemos un espacio tridimensional cartesiano:



En este sentido un espacio cartesiano sería una representación del espacio donde la posición de un punto queda unívocamente definida por su distancia a 3 planos ortogonales entre sí, quedando esa posición expresada por 3 números reales llamados coordenadas, y siendo el origen de coordenadas el punto en el que se cortan los *n* planos (siempre hablando de espacios euclídeos e isomorfos y, en este caso concreto, exactamente 3 planos).

¿Qué es, entonces, ese Espacio Cartesiano? En nuestro caso lo vamos a definir, en beneficio de la claridad de comprensión de conceptos que vendrán después, como un conjunto de puntos (supongamos en este caso, finito, como de 9 saltos discretos (si atendemos a los cuadritos del esquema que hemos puesto)). Puntos, ocupados o no, puntos definidos, o definibles cada uno de

ellos, mediante tres coordenadas reales (una por cada plano). Digamos que dicho Espacio Cartesiano es un conjunto de puntos 'potencialmente *ocupables*' o, al menos, 'definibles'.

Ahora, siguiendo con una definición análoga a la anterior, ¿Qué es, básicamente, un espacio vectorial?

(OBSERVACIÓN: vamos a dar por supuesto, para que esto no se alargue ad infinitum, que sabemos lo que es un vector)

De entrada, como imaginamos, un Espacio Vectorial no es otra cosa que un Conjunto de vectores que cumple una serie de requisitos. Anteriormente hemos visto que los requisitos de cualquier punto del Espacio Cartesiano tridimensional era que pudieran ser definidos por una tríada de números reales. En el caso de los Espacios Vectoriales la cosa es un poco más complicada ya que la naturaleza de los vectores es algo más compleja que la de un punto (tampoco es nada del otro mundo). Sin embargo, de nuevo, y puesto que, de momento, estamos estudiando cómo caracterizar fenómenos que acaecen dentro del paradigma de la Relatividad Especial en el que el espacio en que nos movemos es isomorfo, plano, sin "deformaciones" a causa de los campos gravitatorios, vamos a hacer referencia sólo y exclusivamente a aquellos elementos y condiciones que nos hagan falta para seguir avanzando en nuestra comprensión de los fenómenos que recogemos en esta sección.

Así, podremos definir un espacio vectorial V como:

- Un conjunto de elementos (vectores) a los que llamaremos, por ejemplo, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$
- En este espacio vectorial V deben cumplirse las siguientes 8 propiedades:
    - Propiedad 1. Poder realizarse estas dos operaciones:
        - Suma de vectores, es decir, dos vectores pertenecientes al espacio V, se pueden sumar entre sí dando como resultado otro vector que, a su vez, pertenecerá también al espacio V. Es decir:

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$$

        - Producto de un vector por un escalar, es decir, si multiplicamos un vector perteneciente al espacio V por un escalar el resultado debe ser otro vector que también pertenezca al espacio V. Es decir:

$$\forall\, \vec{u} \in V, \forall\, \alpha \in R \rightarrow \alpha \cdot \vec{u} \in V$$

    - Propiedad 2. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
    - Propiedad 3. Asociativa: : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
    - Propiedad 4. Elemento nulo (el cero): $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
    - Propiedad 5. Elemento Opuesto: $\overrightarrow{u'} + \vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{u'} = \vec{0}$
    - Propiedad 6. Distributiva:
        - $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
        - $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
    - Propiedad 7. Asociativa: $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
    - Propiedad 8. Elemento Identidad (el uno): $I \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Esto es bastante obvio y queda bastante claro, pero vamos a ver algunos ejemplos que nos ayuden a entender la importancia del concepto de Espacio Vectorial.

Supongamos un Espacio Vectorial R^2. Los vectores de R^2, serán del tipo $(2\ \ 3)$ si lo ponemos en forma fila o $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ si lo ponemos en forma columna. Es decir, que tendrán dos componentes. Así el

espacio Vectorial R^2 será el conjunto de todos los vectores, si no añadimos condiciones adicionales, que tengan la forma $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$. Y la dimensión del espacio R^2 será de 2.

Igualmente, para R^3, serán del tipo $(2\ \ 3\ \ 7)$ o $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ y su dimensión será de 3.

Téngase en cuenta, ahora, que una matriz es también un vector o, mejor dicho, un vector es una matriz de una sola columna o una sola fila *(una matriz sería una especie de vector que se expande en dimensiones paralelas a sus componentes)*. Así, una Matriz de 2x2 pertenecerá a un Espacio Vectorial de dimensión 4 (4, sí, pensemos en las combinaciones posibles en que un vector de 2 dimensiones se puede relacionar con otro vector de dos dimensiones); una Matriz de 3x3 pertenecerá a un Espacio Vectorial de dimensión 9.

A esto añadamos que los polinomios no son sino matrices expresadas de una manera directamente relacionada con las variables que definen las dimensiones de un espacio (por ejemplo: $2x + 3y + 5z$) por lo que podremos decir que un Polinomio de primer grado $[P_1(x)]$ pertenecerá a un Espacio Vectorial de dimensión 2 (una para la variable y otra para la constante que queda libre); un Polinomio de segundo grado $[P_2(x)]$pertenecerá a un Espacio Vectorial de dimensión 3; un Polinomio de tercer grado $[P_3(x)]$ pertenecerá a un Espacio Vectorial de dimensión 4, …

Ahora pensemos en las relaciones que hay entre los vectores dentro de un Espacio Vectorial. Digamos que, dentro de un Espacio Vectorial, hay vectores linealmente dependientes y vectores linealmente independientes. Entender esto es muy fácil. Un vector es linealmente dependiente de otro cuando, multiplicado por un escalar, el uno produce al otro. Es decir, son como parientes, como generadores: son ***paralelos*** (apuntan en la misma dirección). De un vector determinado podremos extraer nuevos vectores cuyo módulo podrá cambiar, pero no su dirección, su naturaleza.

Por otro lado, un vector ***siempre*** será linealmente independiente de otro cuando no apunten en la misma dirección; cuando desde el uno no se pueda llegar al otro, es decir, no se podrá construir el segundo partiendo del primero. Si dos vectores no tienen la misma dirección serán, siempre, linealmente independientes ya que el segundo no podrá ser generado por el primero, es decir, no se podrá expresar como una combinación lineal arbitraria del primero.

Veamos esto con un poco de más detalle.

Dado un conjunto de vectores decimos que son linealmente dependientes si uno de éstos se puede expresar como combinación lineal de otros. En el plano, dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ que tienen la misma dirección, son linealmente dependientes porque se cumple que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$.

Así pues, podemos decir que todos los vectores paralelos son linealmente dependientes entre ellos, ya que todos tienen la misma dirección.

De la misma forma si dos vectores no tienen la misma dirección son linealmente independientes, ya que uno de estos vectores no se puede expresar como combinación lineal del otro.

(OBSERVACIÓN: imaginemos que tenemos un vector $\vec{u}$, ¿podría generar un vector perpendicular a sí mismo? Obviamente no. El otro día, pensaba mientras paseaba a Frodo que, bueno, si cogiéramos "una parte diferencial" del vector, como un punto, y lo replicara en la dirección perpendicular, podría obtener un vector perpendicular al primero, pero, esto, era hacer el idiota por dos motivos fundamentales:

a) *los vectores no son subdivisibles en "puntos", no son una sucesión de puntos, no son un BITMAP, son, eso, vectoriales, unidades completas, como paquetes discretos de información. El vector es una unidad en sí misma. Existe el vector diferencial, pero no el diferencial del vector*

b) *aun suponiendo que hubiéramos conseguido dividir lo indivisible, quedarnos con un parte diferencial del vector… hacia dónde lo proyectaríamos… en el mundo del vector original... ¿qué es esa cosa fantasmagórica a la estaríamos llamando "perpendicular")*

Dos vectores con direcciones diferentes serán linealmente independientes y formarán un plano. Ahora, un tercer vector inserto en ese plano sí que será, efectivamente, dependiente de los dos primeros pues, podrá ser definido mediante una combinación lineal de los dos primigenios que "generaron el plano". Es decir, en el *plano, de* tres vectores ***siempre habrá uno*** que sea linealmente dependiente porque podremos expresarlo como combinación lineal de los otros dos. Y estos dos primigenios que conformaron el plano, que permiten generar todos los vectores de un Espacio Vectorial de dos dimensiones, es a lo que se llama Base Vectorial (ahora lo veremos con más detalle).

Así tenemos que las características de la independencia lineal son:

1. Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente independientes si cualquier combinación lineal de éstos igualada a cero implica que los escalares $\alpha \; y \; \beta$ son nulos, es decir:

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \alpha = 0 \; y \; \beta = 0$$

2. Dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son linealmente independientes si:

$$\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2}$$

(OBSERVACIÓN: obvio, al no conservar la proporción, no pueden apuntar en la misma dirección)

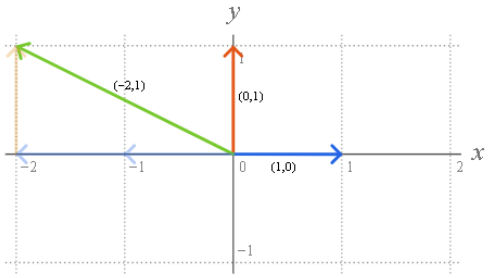
En definitiva, una base vectorial es el ***conjunto exhaustivo***, de ***TODOS*** los vectores unitarios independientes que existen en el Espacio Vectorial y a partir de los cuales se pueden crear todos los vectores posibles dentro de dicho Espacio. Es decir, todos los vectores posibles dentro de un Espacio Vectorial serán una combinación de los vectores linealmente independientes que conforman la Base Vectorial. Los vectores de la Base Vectorial deben ser, pues, un conjunto de generadores, es decir, son los ladrillos justos (pero no puede faltar ni uno) con los que podremos construir todos los vectores posibles dentro del espacio Vectorial.

Así, por ejemplo, en un Espacio Vectorial Euclídeo de tres dimensiones, todos los vectores posibles se podrán construir a partir de los vectores, de módulo 1, que coinciden con el eje x, eje y y eje z. Estos tres vectores que conforman la base vectorial de dicho Espacio Vectorial, como es más que obvio, son independientes entre sí, son perpendiculares entre sí. Si alguno de ellos fuera dependiente de alguno de los otros, tendríamos que sacarlo de la base pues ya no es, digamos, un átomo básico con el que construiría el resto sino que, como decimos, ya estaría siendo un subproducto de otro previo y, por lo tanto, no es ningún "ladrillo elemental" del Espacio Vectorial.

Por ejemplo, en un Espacio Cartesiano de dos dimensiones, la base típica es ésta (en azul y rojo):

A. Primero buscaremos la componente paralela ($\vec{x}_{||}$).
B. Una vez tengamos ($\vec{x}_{||}$), podremos calcular ($\vec{x}_{\llcorner}$) restando los vectores: $\vec{x} - \vec{x}_{||}$ (véase nota 33).
C. Una vez tengamos $\overrightarrow{x'}_{\llcorner}$, encontraremos fácilmente $\hat{a}$ dividiendo $\vec{x}_{\llcorner}$ por su módulo (es más que obvio que apuntan en la misma dirección): $\hat{a} = \frac{\vec{x}_{\llcorner}}{|\vec{x}_{\llcorner}|}$.
D. Para encontrar después el vector $\hat{b}$ haremos el producto vectorial de $\hat{a} \times \hat{n}$ (véase nota 33).

Procedamos, pues, con el desarrollo del ***paso A***, es decir, el vector paralelo ($\vec{x}_{||}$) que forma parte de la suma que arroja como resultado el vector $\vec{x}$:



A partir de esos dos, se construye cualquier otro que pertenezca a ese Espacio Vectorial de dos dimensiones.

Otro ejemplo interesante y mucho más cercano a nuestros objetivos. Si quisiéramos calcular las componentes de un vector cualquiera en un espacio vectorial esférico tendríamos que tener la Base Vectorial de dicho Espacio. Dicha base (véase la nota 40) sería:

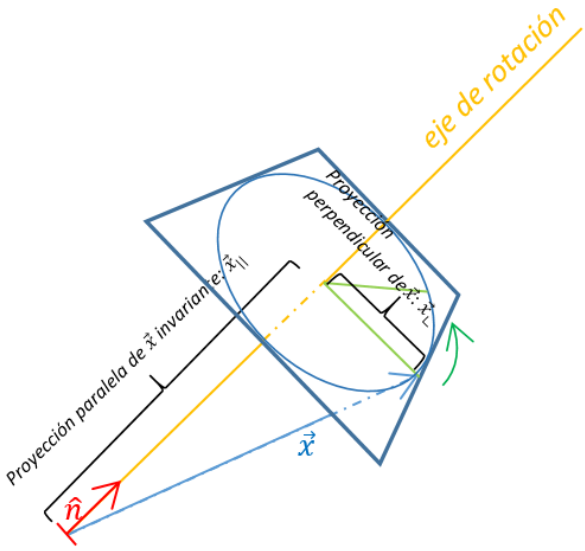
$$\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi \cdot \hat{x} + \sin\theta\sin\varphi \cdot \hat{y} + \cos\theta \cdot \hat{z}$$

(obviamente, multiplicamos cada 'dirección' por la componente de su eje)

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi \cdot \hat{x} + \cos\theta\sin\varphi \cdot \hat{y} - \sin\theta \cdot \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi \cdot \hat{x} + \cos\varphi \cdot \hat{y}$$

E inversamente:



(traemos de nuevo el gráfico para poder guiarnos geométricamente)

En el Espacio Euclídeo, el producto de dos vectores unitarios es sencillamente el coseno del ángulo entre ellos. Esto es consecuencia de la definición de producto escalar (si se quiere entender mejor, véase la sección, más adelante, sobre la *Métrica*) y del hecho de que el módulo de ambos vectores es la unidad:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = |\hat{u}| \cdot |\hat{v}| \cdot \cos\theta$$

Pero como sabemos que:

$$|\hat{u}| = 1 \quad y \quad |\hat{v}| = 1$$

Tenemos que:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \cos\theta$$

De esto resulta que el producto de un vector por un vector unitario (o cualquier vector) es la proyección escalar del vector sobre la dirección determinada por el vector unitario (digamos que en el vector unitario ya está incorporada la información de la dirección que lleva). Así, en el caso que nos ocupa:

$$\vec{x} \cdot \hat{n} = |\vec{x}| \cdot \hat{n} \cdot \cos\theta$$

Y como el módulo del vector $\hat{n}$ es la unidad, la ecuación se transforma en:

$$\vec{x} \cdot \hat{n} = |\vec{x}| \cos\theta$$

Por ello, podremos definir el vector paralelo ($\vec{x}_{||}$) como:

$$\vec{x}_{||} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} \quad ^{35}$$

[35] Téngase en cuenta que de este producto escalar $(\vec{x} \cdot \hat{n})$ obtenemos un escalar. Sin embargo necesitamos un vector y, por eso, se multiplica por el vector unitario $\hat{n}$ llegando a la expresión: $(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$, para darle, digamos, "categoría de vector" (dirección, sentido, …) al escalar obtenido.

Procedamos, ahora, con el ***paso B***, es decir, el vector perpendicular ($\vec{x}_{\llcorner}$) que forma parte de la suma que arroja como resultado el vector $\vec{x}$:

(OBSERVACIÓN: como sabemos por la nota 34)

$$\vec{x}_{\llcorner} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

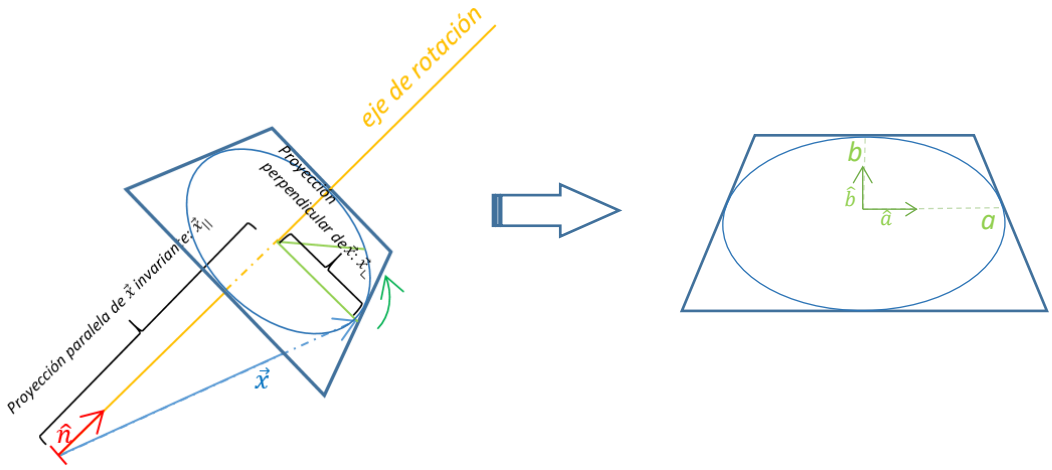
Procedamos con el ***paso C*** de nuestro plan: encontrar una definición del vector unitario $\hat{a}$ que más que obvio que es (véase nota 30):

$$\hat{a} = \frac{\vec{x}_{\llcorner}}{|\vec{x}_{\llcorner}|}$$

Procedamos, finalmente, con el ***paso D*** que teníamos previsto: encontrar la definición del vector unitario $\hat{b}$ que, de nuevo, es obvio que es el producto vectorial de $\hat{a}$ y $\hat{n}$:

$$\hat{b} = \hat{a} \times \hat{n}$$

Llegados a este punto tenemos la siguiente información (traemos de nuevo los gráficos para poder ver el desarrollo en la misma página):



$$\vec{x}_{||} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

$$\vec{x}_\perp = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{x}_\perp}{|\vec{x}_\perp|}$$

$$\hat{b} = \hat{n} \times \hat{a}$$

Ahora bien, en cuanto pongamos a rotar $\vec{x}_\perp$ se transformará en un $\overrightarrow{x'}_\perp$ que "repartirá" su composición entre dos componentes a y b, es decir, obviamente:

$$\overrightarrow{x'}_\perp = |\vec{x}_\perp| \cdot [(\cos\theta)\hat{a} + (\sin\theta)\hat{b}]$$

Donde, ahora, θ es el ángulo que se forma entre las componentes de $\overrightarrow{x'}_\perp$ en a y b.

Sabemos que un vector $\vec{x}$ se puede expresar como la suma de otros dos vectores base… ¿cómo definíamos nuestro vector $\vec{x}$? Como:

$$\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_\perp$$

Y, ya lo dijimos, cuando empecemos a realizar la rotación sucederá que:

$$\overrightarrow{x'} = \vec{x}_{||} + \overrightarrow{x'}_\perp$$

Así, ahora, según lo que hemos ido deduciendo, tendremos que:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + |\vec{x}_\perp| \cdot [(\cos\theta)\hat{a} + (\theta)\hat{b}]$$

(en verde el vector paralelo y en azul el vector perpendicular rotante, como hemos visto)

O lo que es lo mismo:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + |\vec{x}_\perp|(\cos\theta)\hat{a} + |\vec{x}_\perp|(\sin\theta)\hat{b}$$

Que, si empezamos a sustituir con lo que tenemos, reescribimos como:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + |\vec{x}_\perp|(\cos\theta)\frac{\vec{x}_\perp}{|\vec{x}_\perp|} + |\vec{x}_\perp|(\sin\theta)(\hat{n} \times \hat{a})$$

Seguimos:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x}_{\llcorner} + |\vec{x}_{\llcorner}|(\sin\theta)(\hat{n} \times \frac{\vec{x}_{\llcorner}}{|\vec{x}_{\llcorner}|})$$

Que reescribimos como:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x}_{\llcorner} + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x}_{\llcorner})^{36}$$

Hagamos un truquillo ahora (su única finalidad es que nos quede un resultado final mucho más manejable): ¿Podríamos reescribir el último término $[(\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x}_{\llcorner})]$ cómo $[(\sin\theta)(\hat{n} \times (\vec{x}_{\llcorner} + \vec{x}_{||}))]$?

En resumen, sí, porque el producto vectorial tiene la propiedad distributiva, de manera que:

$$\left(\hat{n} \times \left(\vec{x}_{\llcorner} + \vec{x}_{||}\right)\right) \rightarrow \hat{n} \times \vec{x}_{\llcorner} + \hat{n} \times \vec{x}_{||}$$

De donde, como sabemos que $\hat{n}\ y\ \vec{x}_{||}$ son paralelos, el producto vectorial $(\hat{n} \times \vec{x}_{||})$ será cero y, por lo tanto, podremos hacer la inclusión que proponemos ya que ello no produce cambio alguno. Así que como decíamos, tenemos:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x}_{\llcorner} + (\sin\theta)(\hat{n} \times (\vec{x}_{\llcorner} + \vec{x}_{||}))$$

Que nos permitirá rescribir como:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x}_{\llcorner} + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Por último, como sabemos que $\vec{x}_{\llcorner} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}$, podemos reescribir como:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Dejándonos la expresión, por fin, en función de $\vec{x}\ y\ \hat{n}$.

Ahora sólo nos queda resumir la expresión:

$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\cos\theta\,(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Reordenamos:

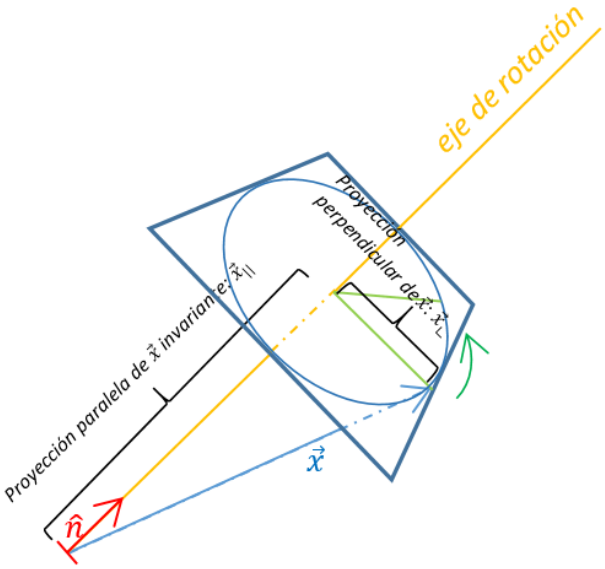
$$\overrightarrow{x'} = (\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} - (\cos\theta\,(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\cos\theta)\vec{x} + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Sacamos factor común entre los dos primeros términos:

$$\overrightarrow{x'} = (1 - \cos\theta)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} + (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Esta expresión es para una rotación activa, es decir, para el caso en que gira, en sentido antihorario, el vector $\vec{x}$ de nuestro esquema:

[36] Como la cantidad $|\vec{x}_{\llcorner}|$ es un escalar, puede salir del productor vectorial como denominador y anularse con la misma cantidad que estaba multiplicando al seno.



Sin embargo, recordemos que las rotaciones que realizábamos eran rotaciones pasivas en las que lo que rota son los ejes. Para convertir este resultado, antes de volver al tronco común, en el resultado de una rotación pasiva en vez de activa, lo único que debemos hacer es cambiar el ángulo θ en un ángulo - θ.

En tal caso, con sólo recordar las propiedades trigonométricas según las cuales[37]:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad y \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

Por lo que, finalmente podremos escribir (esta vez sí que es definitivo) como:

$$\overrightarrow{x'} = (1 - \cos\theta)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Una vez que hemos alcanzado este resultado, para reorientarnos en nuestro desarrollo, podemos retrotraernos a lo que decíamos en nuestro hilo principal. Decíamos hace unas páginas que podíamos caracterizar una rotación pasiva arbitraria en un espacio tridimensional como:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta\left(n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z\right)\right]$$

Que era lo mismo que decir que:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta \cdot \hat{n} \cdot \vec{G}\right]$$

A lo que podíamos hacer una aproximación (como hicimos en el caso de las dos dimensiones) mediante un desarrollo en series de Taylor para acabar construyendo una matriz a exponenciar. Sin embargo, aunque ya habíamos llegado a la estructura conceptual de la rotación tridimensional (que es lo importante), lo tedioso de su desarrollo nos "echó un poco hacia atrás" y nos impulsó a tratar de buscar un camino alternativo, quizás más "geométrico", para poder construir la matriz de rotación y, así era como habíamos llegado al resultado según el cual una rotación pasiva de un cierto ángulo θ de un vector $\vec{x}$ en torno a un eje arbitrario en un espacio tridimensional se puede caracterizar como:

[37] No vamos a incluir, de momento, las demostraciones trigonométricas por considerar que se pueden consultar en cualquier otro lugar con bastante facilidad.

$$R_{(\theta)}\vec{x} = (1-\cos\theta)(\vec{x}\cdot\hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)(\hat{n}\times\vec{x})$$

Ahora, desarrollemos esta expresión para construir la matriz de rotación resultante. Con tal fin podemos reescribir la expresión como:

$$R_{(\theta)}\vec{x} = (1-\cos\theta)\big(xn_x + yn_y + zn_z\big)\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)(\hat{n}\times\vec{x}) \quad [38]$$

Y recordando cómo se hace un producto vectorial:

$$(\vec{x}\times\vec{n}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}$$

De manera que:

$$(\vec{x}\times\vec{n}) = i\big(y\cdot n_z - z\cdot n_y\big) - j(x\cdot n_z - z\cdot n_x) + k\big(x\cdot n_y - y\cdot n_x\big)$$

O lo que es lo mismo:

$$(\vec{x}\times\vec{n}) = i\big(y\cdot n_z - z\cdot n_y\big) + j(z\cdot n_x - x\cdot n_z) + k\big(x\cdot n_y - y\cdot n_x\big)$$

Y por la propiedad del producto vectorial:

$$(\vec{x}\times\vec{n}) = -(\vec{n}\times x)$$

Tenemos que:

$$(\vec{n}\times\vec{x}) = -i\big(y\cdot n_z - z\cdot n_y\big) - j(z\cdot n_x - x\cdot n_z) - k\big(x\cdot n_y - y\cdot n_x\big)$$

O lo que es lo mismo:

$$(\vec{n}\times\vec{x}) = i\big(z\cdot n_y - y\cdot n_z\big) + j(x\cdot n_z - z\cdot n_x) + k\big(y\cdot n_x - x\cdot n_y\big)$$

Por lo que podremos reescribir como:

$$R_{(\theta)}\vec{x} = (1-\cos\theta)\big(xn_x + yn_y + zn_z\big)\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)\begin{pmatrix} zn_y - yn_z \\ xn_z - zn_x \\ yn_x - xn_y \end{pmatrix}$$

Y como sabemos que:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \qquad y \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Podremos reescribir matricialmente como:

$$R_{(\theta)}\vec{x} = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)\big(xn_x + yn_y + zn_z\big)n_x + (\cos\theta)x - (\sin\theta)zn_y + (\sin\theta)yn_z \\ (1-\cos\theta)\big(xn_x + yn_y + zn_z\big)n_y + (\cos\theta)y - (\sin\theta)xn_z + (\sin\theta)zn_x \\ (1-\cos\theta)\big(xn_x + yn_y + zn_z\big)n_z + (\cos\theta)z - (\sin\theta)yn_x + (\sin\theta)xn_y \end{pmatrix}$$

[38] Merece la pena haber desarrollado esta fórmula porque es una expresión cuyo conocimiento es muy útil por el uso que se hace de ella en Mecánica Cuántica.

Y como de esto $R_{(\theta)}\vec{x}$, queremos sólo la matriz $R_{(\theta)}$, lo que tendremos es[39]:

$$R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)(n_x)n_x + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_y)n_x + (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta)(n_z)n_x - (\sin\theta)n_y \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_y - (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta)(n_y)n_y + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_z)n_y + (\sin\theta)n_x \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_z + (\sin\theta)n_y & (1-\cos\theta)(n_y)n_z - (\sin\theta)n_x & (1-\cos\theta)(n_z)n_z + (\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Que reescribimos como:

$$R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta){n_x}^2 + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_y)n_x + (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta)(n_z)n_x - (\sin\theta)n_y \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_y - (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta){n_y}^2 + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_z)n_y + (\sin\theta)n_x \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_z + (\sin\theta)n_y & (1-\cos\theta)(n_y)n_z - (\sin\theta)n_x & (1-\cos\theta){n_z}^2 + (\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Y ésta es la matriz de rotación "arbitraria" en un espacio euclídeo de 3 dimensiones a la que, como hemos dicho, podríamos haber llegado mediante $R(\theta) = \exp\left[\theta \cdot \hat{n} \cdot \vec{G}\right]$ pero que, para evitar (aún más) tedio, hemos optado por desarrollar de esta otra manera aprovechando, ya puestos, para traer al caso algunas cuestiones sobre vectores y, de paso, conocer una expresión muy común en Mecánica Cuántica:

$$(R_{(\theta)}\vec{x} = (1-\cos\theta)(\vec{x}\cdot\hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)(\hat{n}\times\vec{x})).$$

Por otro lado, y para terminar de culminar esta sección acerca de la rotación arbitraria en espacios de 3 dimensiones ($SO(3)$) diremos que el vector unitario $\hat{n}$ en coordenadas esféricas[40] se expresa de la siguiente manera:

---

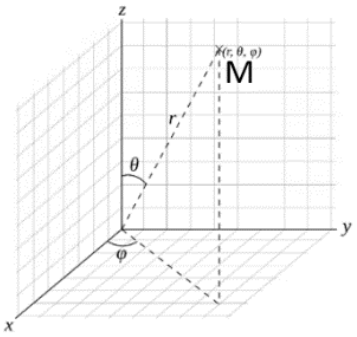
[39] De la primera fila extraemos todo aquello donde haya un producto por x para dejarlo en el término ∂_{11}de la matriz, todo aquello que sea producto por y para dejarlo en el término ∂_{12} de la matriz, todo aquello que sea producto por z para dejarlo en el término ∂_{13} de la matriz (recordemos, la condición es por x, y, o z no por $n_x, n_y \; o \; n_z$).

De la segunda fila extraemos todo aquello donde haya un producto por x para dejarlo en el término ∂_{21} de la matriz, todo aquello que sea producto por y para dejarlo en el término ∂_{22} de la matriz, todo aquello que sea producto por z para dejarlo en el término ∂_{23} de la matriz.

De la tercera fila extraemos todo aquello donde haya un producto por x para dejarlo en el término ∂_{31} de la matriz, todo aquello que sea producto por y para dejarlo en el término ∂_{32} de la matriz, todo aquello que sea producto por z para dejarlo en el término ∂_{33} de la matriz.

Obviamente, en los componentes resultantes no hay poner las x, y, z que multiplican pues, va de suyo, que por su posición en la matriz hay un x, y, o z que multiplica a todo el componente.

[40] Hagamos, pues un breve refresco de cómo se trabaja en un sistema de coordenadas esféricas. Para comenzar empecemos por analizar el siguiente sistema, representado según el modelo cartesiano, donde tenemos un punto, llamemos, M que está a una distancia 'r' del origen.



Dicho punto tendrá unas coordenadas cartesianas:

$$M \rightarrow (x, y, z)$$

En coordenadas esféricas, sin embargo, la primera coordenada que necesitaremos será la distancia del punto M al origen que, ya sabemos, es el radio, es decir, r.

Después necesitaremos el ángulo que la proyección del radio hace sobre el plano (x,y). Un ángulo, desde el eje x al eje y, que llamaremos φ y que, habitualmente, se llama ángulo azimutal.

Y después tendríamos otro ángulo, medido desde el eje z hacia el plano (x,y) que llamaremos θ y que podríamos identificar con lo que llamamos declinación (cuándo se aleja-acerca de la estrella polar) en astronomía o, casi mejor, la colatitud.

Así, lo que en el sistema cartesiano se describe así:

$$M \rightarrow (x, y, z)$$

En el sistema de coordenadas esféricas se describe así:

$$M \rightarrow (r, \varphi, \theta)$$

Se pueden establecer, obviamente, las relaciones de conversión que existen entre los dos sistemas de coordenadas. Hagamos una aproximación.

Es obvio las magnitudes de las coordenadas esféricas tendrían los siguientes rangos:

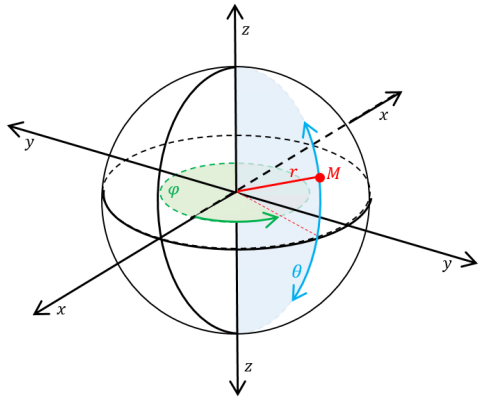
$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi\ (rad)\ 360º$$

$$0 \leq \theta \leq \pi\ (rad)\ 180º$$

Ojo al 360º y 180º, parece confuso que θ sólo recorra 180º pero, a nada que se piense, se entiende. Si uno de los ángulos recorre todo, el otro sólo tiene que recorrer la mitad. Veamos cómo.

Obsérvese en la siguiente figura que pudiendo barrer φ un ángulo de 360 º, θ sólo necesita barrer 180 º para poder generar una circunferencia completa (suponiendo, claro está, que el radio es constante).



Efectivamente, imaginemos que a cada grado que se incrementa φ en su rotación en torno al eje z, θ hace un "barrido" completo de arriba a abajo de 180 º. Claro, cuando φ ha completado su rotación de 360º, θ ya se ha encargado de "dibujar", subiendo y bajando (sólo cubriendo 180º), toda la esfera.

Ahora pasemos a pensar en los diferentes escenarios en puede darse el "movimiento" del punto $M(r, \varphi, \theta)$.

Supongamos que ***el radio permanece constante***. En tal caso, lo que estaríamos diciendo es que φ y θ, son variables libres, variables independientes, es decir, que no dependen de r (imaginemos la matriz que esto dibuja: en los componentes en que se cruzan φ y θ con r, tendríamos un 0). Es decir, φ y θ se mueven cubriendo, como les da la gana, todo el rango posible que tienen asignado:

$$r = cte$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Es decir, esto generará una ***superficie perfectamente esférica***.

(por otro lado, si el radio no fuera constante, estaríamos ante superficies irregulares de la índole que quisiéramos).

Supongamos ahora que ***φ permanece constante***:

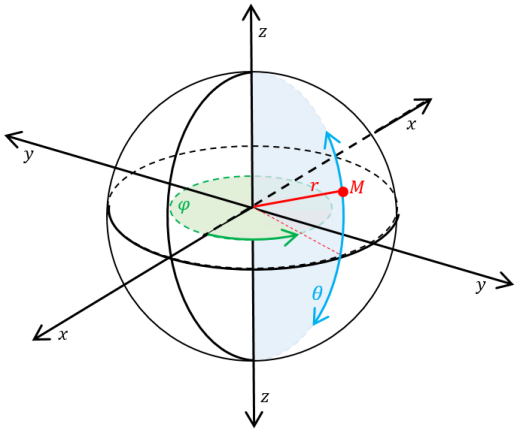
$$\varphi = cte$$

En tal caso quedan libres las otras dos variables:

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi\ (rad)$$

Obtendríamos un plano (a nada que uno mire el dibujo y "agarre Phi" dejándola fija, ve surgir el plano, el plano como el que está coloreado en celeste en nuestro esquema anterior pero, al ser el radio variable, los límites del plano pueden tener cualquier forma, como la de un charco, por ejemplo, totalmente arbitraria).



Supongamos ahora que ***θ permanece constante***:

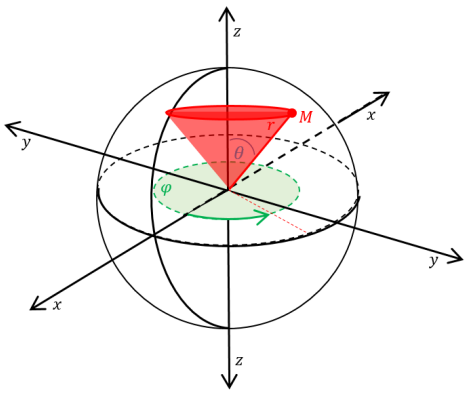
$$\theta = cte$$

En tal caso quedan libres las otras dos variables:

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi\ (rad)$$

Este otro escenario genera, en su barrido**,** ***un cono*** de base irregular (puesto que r va "to loca, padentro-pafuera" pero, claro, puesto que θ, en su "alejamiento del eje z", esta fija y, en cambio, φ está girando "como quiere" y, r, ya lo hemos dicho, va a su bola, pues, eso, se genera un "cono, de base arbitraria" (dibujarlo aquí con una base irregular, arbitrariamente, me va a costar la vida así que pongo una base circular pero, recuérdese, el radio está cambiando por lo que la base no es una circunferencia).



Deduzcamos ahora las ecuaciones de relación entre las variables cartesianas (x, y, z) y las variables esféricas (r, φ, θ). Para ello "unamos", como dos capas superpuestas, los dos sistemas de referencia (hacer el dibujo porque en este la phi y la theta están intercambiadas (yo he hecho un apaño de momento).

(Usando la terminología de la nota 40)

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi\,, \sin\theta\sin\varphi\,, \cos\theta)$$

Y donde:

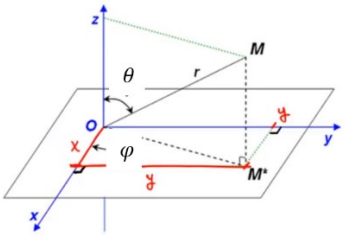
$$\sin\theta\cos\varphi = n_x$$

$$\sin\theta\sin\varphi = n_y$$

$$\cos\theta = n_z$$

Así, una vez dicho todo esto, podemos culminar definiendo el grupo $SO(3)$ como:

$$\boldsymbol{SO(3) = \{\, R_{3x3} \;/\; R^T R = I \;\; [41], det = 1 \;\; [42]\}}$$



Aquí veríamos, por trigonometría muy básica, por ejemplo, que la 'x' es la proyección de la distancia OM^* en el eje de las x. Es decir:

$$x = OM^* \cdot \cos\varphi$$

$$y = OM^* \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

Pero, ahora fijémonos que OM^* es, mirando el rectángulo $(O, M^*, M,'' z'')$, lo mismo que $(M,'' z'')$, en tal caso:

$$OM^* = M''z''$$

Es decir que:

$$OM^* = r \cdot \sin\theta$$

Si ahora reemplazamos, obtenemos todo en función de 'r', es decir que:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

Estas son las ecuaciones de transformación de coordenadas del sistema esférico al sistema cartesiano.

[41] Recordemos: por esto es ***Ortogonal***.

Que tiene tres parámetros libres (se necesitan tres parámetros para definir la matriz):

1. *El ángulo θ que rotamos*
2. *El ángulo θ de su definción en coord. esféricas (lamento haber usado la misma letra griega)*
3. *El ángulo φ de su definción en coord. esféricas*

(hacer matizaciones sobre lo que es el 3 o el 4 en SO) (no son dimensiones, sino parámetros libres).

[42] Recordemos: por esto es ***Special***.

-1.5-

La Métrica (I)

Ya sabemos lo suficiente acerca de cómo se estudian las rotaciones como para poder seguir avanzando con garantías en nuestro estudio. Ahora vamos a abordar un concepto fundamental para nuestro estudio: ***la métrica***.

Para empezar recordemos cómo caracterizábamos una rotación en un plano xy de dos dimensiones:

$$R(\theta) = e^{\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}$$

O lo que es lo mismo:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

La matriz resultante de esta operación deja invariante, como sabemos (véanse páginas 26 y 27), la siguiente magnitud:

$$x^T x = x'^T x'$$

Ya dijimos, en su momento, que la matriz antisimétrica $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ es un generador de rotación y, también, esbozamos en una pequeña nota, que si cambiábamos algo en esta matriz, por ejemplo, un signo, se liaba la de Troya, todo cambiaría.

Supongamos por un momento que cambiamos, por error o por un despiste, uno de los signos de la matriz generadora de rotación y la escribimos así: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. ¿Qué pasaría?

De entrada, tendríamos que dejar de usar la expresión "rotación" y tendríamos que hablar en términos de "transformación" pues, efectivamente, realizaría cambios, pero ya no serían rotaciones. Así, para que terminológicamente no cometamos imprecisiones procederemos a cambiar θ por ω ya que, hablando con propiedad, el parámetro no será estrictamente un ángulo. En el mismo sentido también cambiaremos R por Λ:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

¿Qué consecuencias tendría este, aparentemente, pequeño cambio? Por ejemplo, ¿qué magnitud dejaría invariante ahora esta operación?

En breve lo vamos a ver, pero podemos ir adelantando en respuesta a esta pregunta que, por fin, está directamente relacionado con la Relatividad Especial y que, para poder empezar a acercarnos a la misma, vamos a desarrollar el concepto de ***Métrica***.

Para ello, en primer lugar, analizando una transformación de este tipo:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Podemos intuir que vamos a cambiar "objetos duales" (vectores bidimensionales, transformaciones espacio-temporales de una sola dimensión espacial, etc…) que representaríamos mediante expresiones del tipo: $\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$

Es decir, que estaremos ante transformaciones (ya nos suenan) del tipo:

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = \Lambda(\omega) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

En el que Λ es el "factor (matriz) transformador" que, aplicado sobre una "situación inicial", nos lleva a una "situación transformada".

Llegados a este punto, y análogamente a la metodología empleada en las páginas 44 y 45, podremos presentarla como el siguiente Polinomio de Taylor:

$$\Lambda(\omega) = I + \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{\omega^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 + \cdots + \frac{\omega^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Lo interesante ahora es que esta *nueva matriz* tiene una peculiaridad: que multiplicada por sí misma, da como resultado la identidad. Veámoslo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Esto, es obvio, simplifica enormemente el cálculo del Polinomio de Taylor que hemos propuesto antes, ya que puesto que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I \qquad y \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = I \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podremos reescribir, sacando factor común, como (*ojo a los exponentes pares e impares*):

$$\Lambda(\omega) = \left(1 + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\right) I + \left(\omega + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} + \cdots\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomios de Taylor que se pueden expresar como:

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\right) = \cosh \omega$$

$$\left(\omega + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} + \cdots\right) = \sinh \omega \quad [43]$$

coseno hiperbólico y seno hiperbólico[44]

---

[43] ***IMPORTANTE***: hemos marcado en rojo el primer signo "+" porque es una ***diferencia fundamental***, como era de esperar, entre el desarrollo en series de Taylor del $cos\, x/sen\, x$ y el $cosh\, x\, /senh\, x$. En las partes en que hemos recogido las series de Taylor, tanto para el $cos\, x/sen\, x$ como para el $cosh\, x/senh\, x$, sólo hemos llegado al grado 4 y/o 5. Si hubiéramos desarrollado más elementos de la serie hubiéramos visto que en el caso del $cos\, x/sen$ veríamos aparecer, en términos más avanzados, más signos negativos, aparte del primero, mientras que en el caso del $cosh\, x/senh\, x$ siempre aparecerán signos positivos.

[44] Antes de proceder al desarrollo de la presente nota en la que abordaremos muy someramente qué son y cómo se deducen las funciones trigonométricas hiperbólicas que nos interesan para nuestro estudio, vamos a presentar, también muy esquemáticamente, algunas pinceladas acerca de las funciones trigonométricas, digamos, habituales tal y como se presentan en una circunferencia goniométrica (de radio igual a 1).

Pequeño inciso sobre trigonometría.

Recojo aquí algunas definiciones trigonométricas.

$$\sin\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \quad \rightarrow \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \quad \rightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Ahora, algunas identidades interesantes en las que se ve que combinando unas con otras podemos deducir muchísimas otras identidades:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

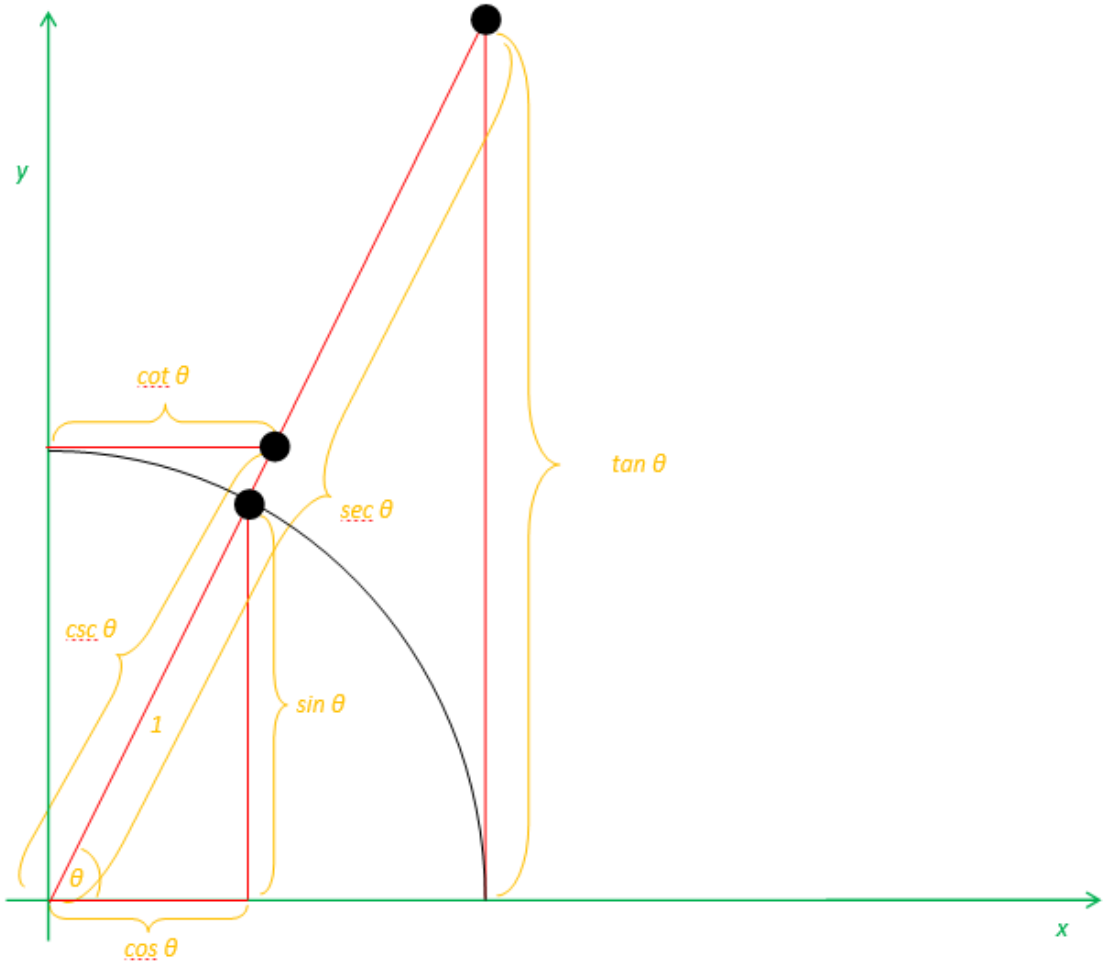
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Estas cosas, además, se pueden usar para computar números sin más.... Podemos usar el algoritmo de los cosenos/senos para otras cosas aparte de relaciones entre ángulos y lados

Miremos este interesante gráfico en el que se reflejan todas las magnitudes trigonométricas.



Obviamente, conociendo seno y coseno, podremos deducir todas las restantes.

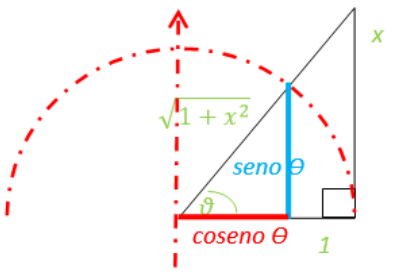
(OBSERVACIÓN: obsérvese que la "hipotenusa" (radio de la circunferencia) es perpendicular a la tangente cuando el coseno es 1 y es paralela a la tangente cuando el coseno es 0)

Importante: todo lo vamos a medir en radianes. Es decir:

$$\left(45° = \frac{\pi}{4}\right); \left(90° = \frac{\pi}{2}\right); (180° = \pi); \left(270° = \frac{3\pi}{4}\right); (360° = 2\pi)$$

Añadamos unos matices que, en ocasiones, pueden ser confusos si es la primera vez que se estudian las funciones trigonométricas esperando que, con las mismas, el asunto quede claramente definido.

Observando el siguiente gráfico:



Podemos decir que, en base a la definición misma del seno y, por otro lado, el Teorema de Pitágoras podremos decir que:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(que ya sabemos que es una distancia)

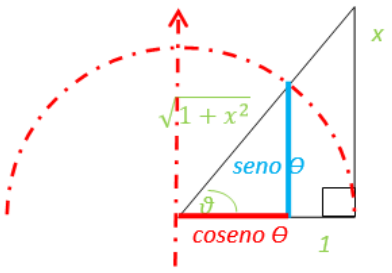
Es decir, obviamente, en el triángulo rectángulo anterior (el marcado en negro) el $\sin\theta$ no es x, sino $x/hipotenusa$: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Es decir, el seno es más pequeño que x (el cateto opuesto).

Por otro lado, el $\cos\theta$ tampoco es el 1 que tenemos en la base del esquema, sino algo más pequeño: $1/hipotenusa$: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

En definitiva: ***los catetos de un triángulo no son ni el seno ni el coseno***.

Revisemos de nuevo el esquema propuesto:

- Por un lado, en negro, tenemos el triángulo rectángulo pitagórico que nos traemos entre manos y, por otro…
- En ***azul el seno*** y en ***rojo el coseno*** insertos en la circunferencia de radio la unidad (con línea discontinua en rojo):



De hecho, si comparamos con el esquema principal anterior, x es la tangente (nunca el seno, repetimos) ya que:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{x\cdot\sqrt{1+x^2}}{1\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1} = x$$

Justo como dijimos antes

Por otro lado, y por dar alguna pincelada a cerca de las funciones trigonométricas inversas, podremos decir que, sabiendo que x es la tangente para un ángulo θ, sabremos que el *arctan* de esa distancia x es el ángulo θ. Es decir, si la tangente de un ángulo es x, el ángulo que 'genera' esa x es θ. Es decir:

$$\arctan x = \theta$$

Para concluir diremos que todo lo que hemos dicho acerca las funciones trigonométricas que hemos explicado hacen referencia a, supongamos, el recorrido que podría hacer un punto a lo largo de una circunferencia y cómo, según sea la posición del mismo, se irán definiendo las diferentes funciones trigonométricas.
Es decir, tenemos un objeto geométrico (una circunferencia) que se define mediante la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

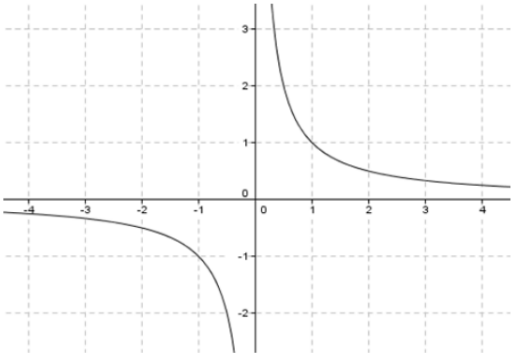
Y, según fijemos nuestra atención en un punto de dicho objeto lineal, se definirán, mediante su proyección sobre los ejes x e y, una serie de funciones que tienen un carácter cíclico: las funciones trigonométricas, digamos, simples.

Las funciones trigonométricas hiperbólicas.

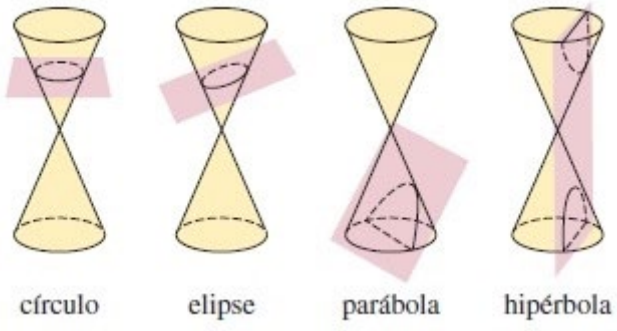
Para abordar las funciones trigonométricas hiperbólicas tendremos que partir, también, de una curva, de un objeto geométrico, pero, en este caso, será diferente a la circunferencia. Un objeto geométrico sobre el que ubicaremos un punto "movible" y para el que, según donde lo paremos, se definirán una serie de funciones $cosh$, $sinh$, …

¿Cuál será ese objeto geométrico? ¿Qué curva, diferente a la circunferencia será? Pues, efectivamente: la hipérbola.

Las curvas hipérbolas se pueden expresar como la representación gráfica de funciones homográficas (gráficas "duales" con comportamiento asintótico respecto a unas rectas definidas). El ejemplo más sencillo es la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$:



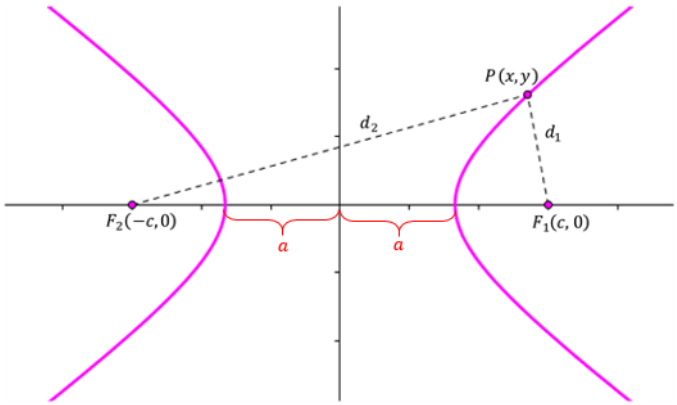
Por otro lado, es interesante saber que una hipérbola es una sección cónica tal y como recogemos en la última de las siguientes imágenes:



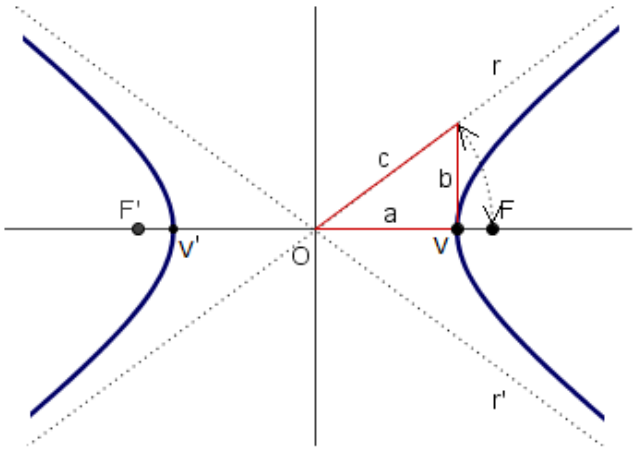
Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados focos, se denomina hipérbola al conjunto de puntos del plano tales que el ***valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos es constante***.

$$\mathcal{H} = \{P(x,y) \mid \ |d(P;F_1) - d(P;F_2)| = 2a = cte\}$$

Mirando el esquema que presentamos abajo, el ***valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto P cualquiera a los Focos*** es ***igual*** a la ***distancia entre los Vértices***, y siempre es una constante positiva.



$$d(F_1, F_2) = 2a$$



Donde si:

$$c > a > 0 \quad y \quad c^2 > a^2$$

Donde, por Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego:

$$\boldsymbol{c^2 - a^2 = b^2}$$

Así, la definición canónica de una hipérbola, con centro en el origen $(0,0)$ y eje focal $y = 0$ (el eje x) es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

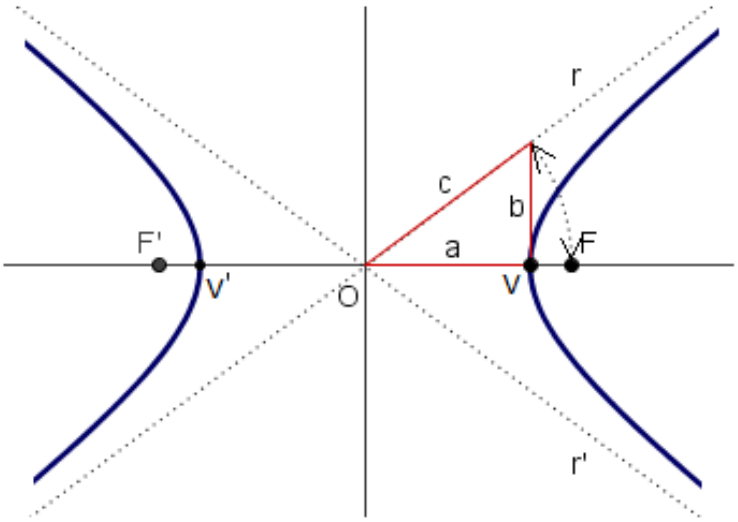
Si buscamos las intersecciones con los ejes, es decir, los vértices, serán (sustituyendo en la fórmula anterior):

- $Para\ y = 0 \rightarrow |x| = a \rightarrow x = \mp a \rightarrow V_{1,2} = (\mp a, 0)$

- $Para\ x = 0 \rightarrow y^2 = -b^2$

(OBSERVACIÓN: en el ejemplo que presentamos la hipérbola no corta al eje y)

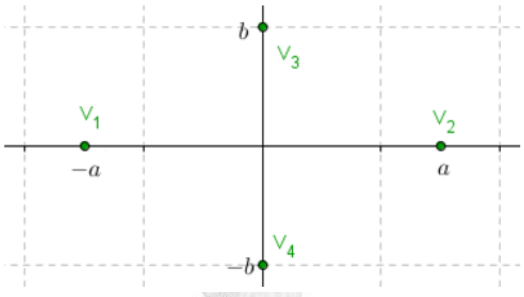
Resumiendo, los elementos de una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son:



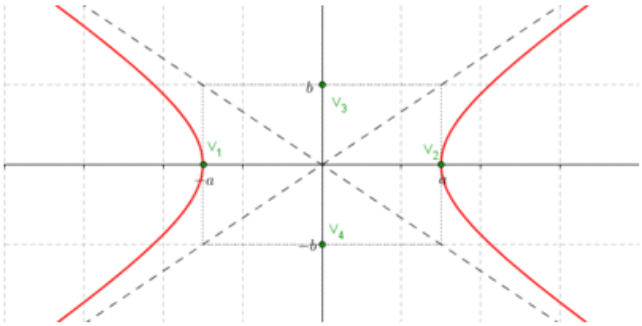
- Focos: $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$
- Centro: C (0,0)
- Vértices: $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$
- Eje focal: recta que contiene a los focos, en este caso es el eje x
- a se denomina semieje real o transverso
- b se denomina semieje imaginario
- 2c es la distancia entre los focos
- Se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$ (c sería una proyección de la circunferencia de la diagonal del rectángulo que forman a y b [Pitágoras puro y duro])
- Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Para más claridad, construyamos, paso a paso, la gráfica de una hipérbola.

En primer lugar ubiquemos los vértices sobre el eje x, simétricos respecto al origen: $V_{1,2} = (\mp a, 0)$ y los puntos de coordenadas $(0, \mp b)$ que llamaremos "vértices imaginarios" $(V_{3,4})$ (importante, no son puntos de la hipérbola, recordemos que hemos dicho que no corta al eje y, pero nos van a servir para trazar un "rectángulo auxiliar"):



Ahora, para trazar las asíntotas, armaremos el "rectángulo auxiliar" que nos ayudará a graficar la hipérbola y, luego, prolongaremos sus diagonales, que son las asíntotas. Una vez las tenemos, podríamos trazar un gráfico aproximado de la hipérbola:

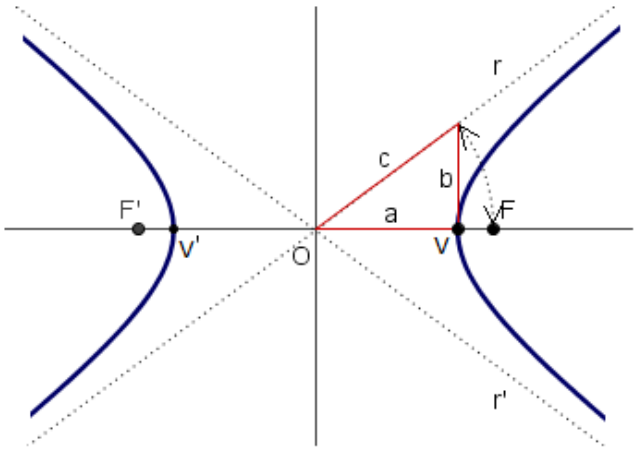


Donde, es fácil verlo, las pendientes de las asíntotas vienen definidas por las ecuaciones:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Los Focos, como los vértices de la hipérbola, están sobre el eje x. Como hemos puesto la condición de que $c > a > 0$, los focos están más alejados del origen que los vértices y deben cumplir la 'propiedad pitagórica': $c^2 = a^2 + b^2$.

(OBSERVACIÓN: el foco está en la 'proyección rotada' de C sobre el eje x)



Si ahora cambiáramos x por y, es decir, en vez de presentar la ecuación como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La presentáramos como:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal $x = 0$ (eje y) (disposición, digamos, vertical).

Es decir, si el coeficiente de x^2 es positivo, sabremos que el eje focal, donde están los Focos, es el eje x (caso de la ecuación azul). Si, por el contrario, el coeficiente de y^2 es positivo, sabemos que el eje focal es el eje y (caso de la ecuación roja).

Para verlo con más claridad, vamos a construir la hipérbola de la ecuación $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{6}=1$ como ejemplo.

De entrada observamos que el coeficiente y^2 es positivo por lo que ya sabemos que el eje focal es el eje y, es decir, tiene una disposición "vertical".

Por otro lado:

$$a^2=4\rightarrow a=2$$
$$b^2=6\rightarrow b=\sqrt{6}$$

Luego los vértices son:

$$V_{1,2}=(0,\pm 2)$$

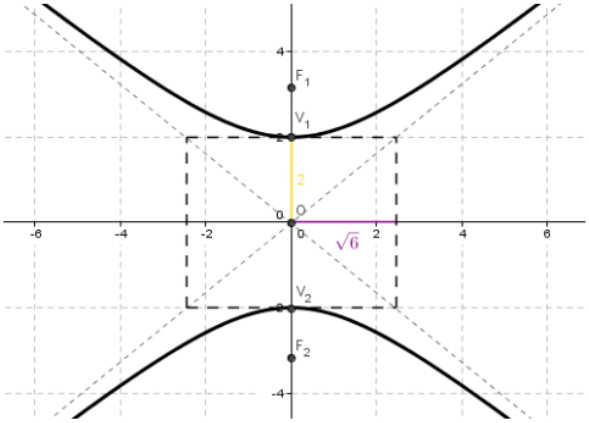
Las coordenadas de los focos los calcularemos mediante la relación: $c^2=a^2+b^2$, luego:

$$c^2=a^2+b^2\rightarrow c^2=2^2+6^2\rightarrow c=\sqrt{10}$$

Es decir:

$$F_{1,2}\left(0,\pm\sqrt{10}\right)$$

Que nos permite trazar:



Donde la ecuación de las asíntotas es:

$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}x, y=\frac{-2}{\sqrt{6}}x$$

De todo esto es fácil comprender que la ***ecuación ordinaria de una hipérbola*** con el eje focal horizontal y centro $C(\alpha,\beta)$ es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Y, como es fácil deducir (por lo que ya hemos dicho anteriormente), la ecuación ordinaria de una hipérbola con el eje focal vertical y centro en $C(\alpha,\beta)$ será:

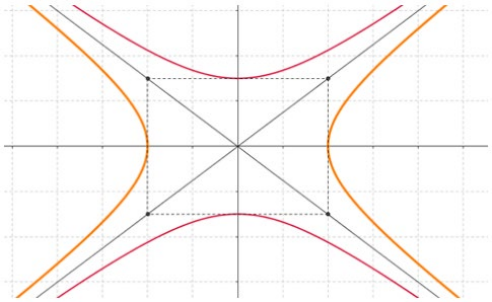
$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

(OBSERVACIÓN: utilizamos a^2 en el denominador del término con coeficiente positivo para poder denominar siempre al semieje real como 'a')

Un caso particular de hipérbola (muy útil para calibrar los ejes de representación gráfica de los fenómenos relacionados con la Relatividad Especial) es el de las **hipérbolas conjugadas**.
Dos hipérbolas son conjugadas una respecto de la otra si el eje real de cada una de ellas es el eje imaginario de las otras.
En términos analíticos se las reconoce porque los signos están cambiados y los coeficientes de x e y siguen siendo los mismos (***no*** se conserva el mismo parámetro para el denominador positivo tal y como comentábamos en la observación anterior). Veámoslo en un ejemplo. Las siguientes hipérbolas son conjugadas:

$$H_1: \frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1 \qquad H_2: -\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$$

Que gráficamente se representa como:



(las hipérbolas comparten asíntotas)

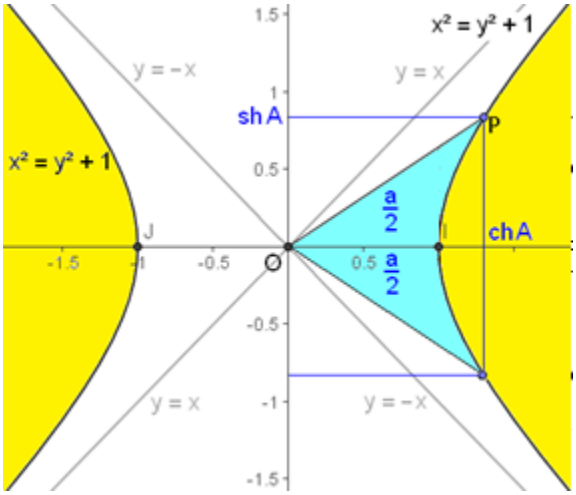
Llegados a este punto, una vez que conocemos qué tipo de curva es la hipérbola, sólo hemos de pensar en un punto que la recorre y qué tipo de reflejo tiene en los ejes x e y (o sus posibles combinaciones, por ejemplo, el plano (x, y)) de manera que podamos deducir las funciones trigonométricas hiperbólicas.

Y, ahora, vamos a introducir un elemento fundamental que distingue a las funciones trigonométricas hiperbólicas de las funciones trigonométricas, digamos, normales. Si éstas últimas, las "normales", se deducían en referencia a unidades lineales (la proyección del radio en los diferentes ejes de coordenadas), las funciones trigonométricas hiperbólicas se hacen en función de un área.

Para abordar la cuestión y entenderla mejor imaginemos una "hipérbola unitaria":

$$x^2-y^2=1$$

Cuyo gráfico es:



Donde vemos:

- El área de las hipérbolas marcada en amarillo.
- Un triángulo rectángulo (en realidad dos, uno arriba y otro abajo) 'casi entero en azul' ('casi entero' porque hay una parte del mismo que está coloreada en amarillo) donde:
  - El cateto de la base del triángulo es $cosh$ de A ($ch\ A$)
  - El cateto opuesto es $sinh$ de A ($sh\ A$)
  - A será el área, sombreada de azul, que nos servirá, como hemos dicho, para calcular las funciones $cosh$ y $sinh$ (naturalmente $Area = \frac{a(área)}{2} + \frac{a(área)}{2}$).

Además, se debe cumplir, una identidad fundamental del seno y coseno hiperbólico, que:

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

(OBSERVACIÓN: recuérdese es una diferencia de cuadrados, no una diferencia de magnitudes lineales)

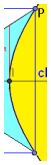
Ahora estudiemos el área A, la zona azul del triángulo (triángulos) que no está ocupada por la zona amarilla de la hipérbola (interesante fijarse en el punto P, que tiene comportamiento asintótico con la diagonal del rectángulo auxiliar generador). Dicho área nos viene dada por la expresión:

$$A = cs - 2\int_1^c y\,dx$$

(OBSERVACIÓN: es imposible seguir sin hacer referencia al cálculo integral. Es muy, muy simple y aunque aquí podemos seguir adelante con nuestro estudio sencillamente dándolo por bueno, para poder entenderlo también he realizado un extenso manual de cálculo básico que adjunto como 'Apéndice I. Cálculo I')

(OBSERVACIÓN 2: a partir de ahora llamaremos a $cosh \to c$ y a $senh \to s$)

Obsérvese que, en la expresión precedente, $c \cdot s$ es la totalidad del rectángulo generado por el triángulo rectángulo 'superior' más el triángulo rectángulo 'inferior', generado, a su vez, por el $cosh$ y el $sinh$, y, por eso, se le debe restar dos veces el área hiperbólica a sustraer (la de 'arriba' y la de 'abajo', en definitiva, esta zona amarilla):



La lógica del cálculo es muy simple:

$$A = cs - 2\int_1^c y\,dx$$

- $c \cdot s$ es, como hemos dicho, el rectángulo formado por los dos triángulos (o cuatro triángulos rectángulos, según contemos).
- En la integral definida tenemos, y, que es la altura de la hipérbola para cada diferencial de x por dx (todos los puntos de x en que 'trazamos' la altura y), cuya sumatoria haremos integrando:
    - Desde $x = 1$, el vértice (recordemos que estamos ante una 'hipérbola unidad'), donde y tendrá una altura de 0 (según el esquema que hemos propuesto, en ese punto se 'termina la zona amarilla') hasta c, el cateto base completo, es decir, el $cosh$ 'entero'.

Pasemos, de una vez, a ***definir el coseno hiperbólico***. Sabemos que:

$$A = cs - 2\int_1^c y\,dx$$

De la ecuación de la hipérbola: $x^2 - y^2 = 1$ podemos despejar y:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Y sustituir en nuestra ecuación para el área, es decir:

$$A = cs - 2\int_1^c \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

Esto se integra del siguiente modo (véase el Apéndice I. Cálculo I):

$$A = cs - 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\right]_1^c$$

$$A = cs - 2\left[\frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|c + \sqrt{c^2 - 1}\right| - \left(\frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \sqrt{1^2 - 1}\right|\right)\right]$$

(OBSERVACIÓN: todo lo rojo se reduce a cero. Recuérdese, aunque es obvio, que ln de 1 es cero)

$$A = cs - 2\left[\frac{c}{2}\sqrt{c^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|c + \sqrt{c^2 - 1}\right|\right]$$

$$A = cs - \left[c\sqrt{c^2-1} - \ln\left|c + \sqrt{c^2-1}\right|\right]$$

$$A = cs - c\sqrt{c^2-1} + \ln\left|c + \sqrt{c^2-1}\right|$$

Ahora usemos la fórmula (la identidad trigonométrica hiperbólica que hemos mencionado):

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

$$c^2 - s^2 = 1$$

De donde despejaremos que:

$$s = \sqrt{c^2-1}$$

Que sustituyendo (con el fin de dejarlo todo en función de 'c'):

$$A = cs - cs + \ln\left|c + \sqrt{c^2-1}\right|$$

Que reducimos a:

$$A = \ln\left|c + \sqrt{c^2-1}\right|$$

Ahora aplicamos el antilogaritmo (exponenciamos a ambos lados de la ecuación):

$$e^A = c + \sqrt{c^2-1}$$

Reorganizamos para poder elevar al cuadrado y que se nos vaya la raíz:

$$e^A - c = \sqrt{c^2-1}$$

$$(e^A - c)^2 = \left(\sqrt{c^2-1}\right)^2$$

Que desarrollando es:

$$e^{2A} + c^2 - 2ce^A = c^2 - 1$$

Volvemos a desarrollar:

$$e^{2A} + \cancel{c^2} - 2ce^A = \cancel{c^2} - 1$$

$$e^{2A} - 2ce^A = -1$$

Recordemos que buscamos c, que es el coseno hiperbólico. Así que despejamos:

$$c = \frac{-1 - e^{2A}}{-2e^{A}} \rightarrow \frac{e^{2A} + 1}{2e^{A}}$$

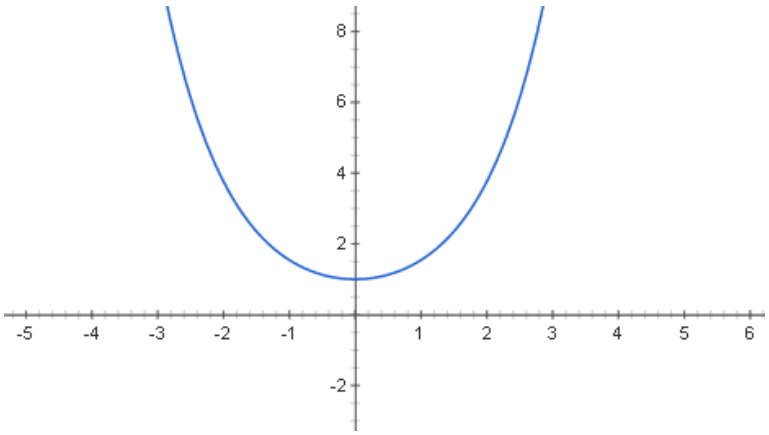
Y ya lo tenemos. Ahora, sencillamente para simplificar, multiplicamos por 1 en la forma de $\left(\frac{e^{-A}}{e^{-A}}\right)$:

$$c = \frac{e^{2A} + 1}{2e^{A}} \cdot \left(\frac{e^{-A}}{e^{-A}}\right)$$

Que nos deja un resultado más parecido a lo que usualmente se maneja:

$$\boldsymbol{\cosh A = \frac{e^{A} + e^{-A}}{2}}$$

Cuya gráfica tiene forma de catenaria:



Con Dominio (digamos, 'lo que entra en la función', los valores posibles de x): $(-\infty, +\infty)$, todos los reales.

Con Codominio (digamos, ' lo que sale', los valores que adopta y):$[1, +\infty)$

Por otro lado, para ***definir el seno hiperbólico***, volvamos al punto:

$$A = \ln\left|c + \sqrt{c^2 - 1}\right|$$

Y recordando, de nuevo la igualdad trigonométrica según la cual:

$$c^2 - s^2 = 1 \rightarrow c = \sqrt{1 + s^2}$$

Sustituimos:

$$A = \ln\left|\sqrt{1 + s^2} + \sqrt{\sqrt{1 + s^2}^2 - 1}\right| \rightarrow \ln\left|\sqrt{1 + s^2} + s\right|$$

Aplicamos el antilogaritmo exponenciando a ambos lados:

$$e^A = s + \sqrt{1 + s^2}$$

Desarrollamos y elevamos al cuadrado:

$$(e^A - s)^2 = (\sqrt{1 + s^2})^2$$

Que es:

$$e^{2A} + \cancel{s^2} - 2se^A = 1 + \cancel{s^2}$$

Despejamos s, que es lo que buscamos ahora (el seno hiperbólico):

$$s = \frac{1 - e^{2A}}{-2e^A}$$

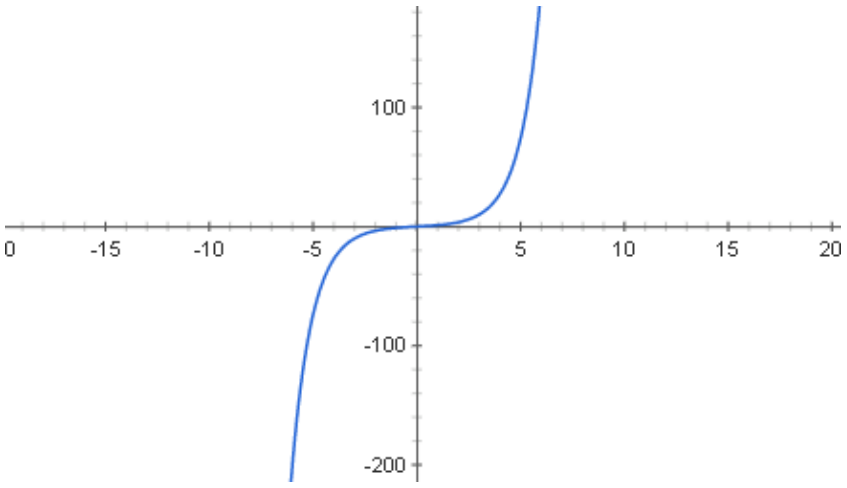
Ahora multiplico por 1, esta vez, bajo la forma $\left(\frac{-e^{-A}}{-e^{-A}}\right)$:

$$s = \frac{1 - e^{2A}}{-2e^A} \cdot \left(\frac{-e^{-A}}{-e^{-A}}\right)$$

Y nos queda la definición del seno hiperbólico de A:

$$\boldsymbol{\sinh A = \frac{e^A - e^{-A}}{2}}$$

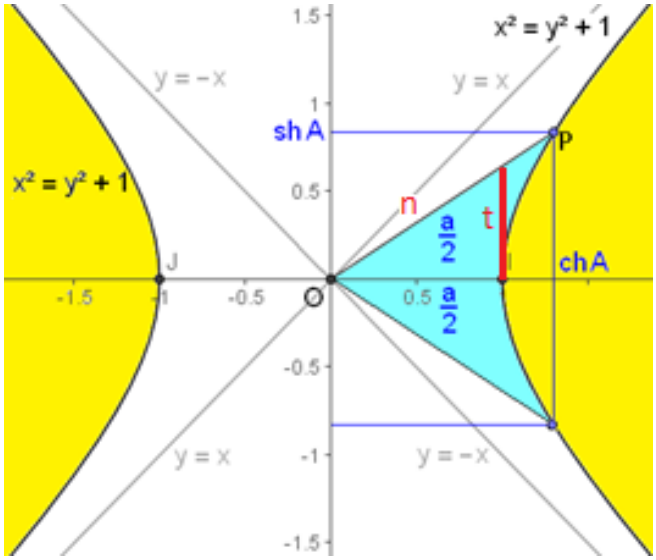
Cuya gráfica se parece a la de $y = x^3$:



Con Dominio (digamos, 'lo que entra en la función', los valores posibles de x): $(-\infty, +\infty)$, todos los reales

Con Codominio (digamos, ' lo que sale', los valores que adopta y): $(-\infty, +\infty)$, todos los reales

Finalmente, para definir la tangente hiperbólica, fijémonos de nuevo en nuestro esquema:



Por semejanza de los triángulos (los definimos por sus lados):

- $(1, t, n$ (punto donde 't' corta a la hipotenusa del triángulo)) y $(c, s, h$ (hipotenusa del triángulo))

Podremos decir que:

$$\frac{t}{1} = \frac{s}{c} \rightarrow t = \frac{s}{c}$$

Por lo que:

$$t = \frac{\frac{e^A - e^{-A}}{2}}{\frac{e^A + e^{-A}}{2}}$$

Es decir:

$$t = \frac{e^A - e^{-A}}{2} \cdot \frac{2}{e^A + e^{-A}} \rightarrow \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}}$$

Con lo que ya tenemos la tangente hiperbólica de A:

$$\boldsymbol{\tanh A = \frac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}}}$$

Cuya gráfica es:

Es decir:

$$\Lambda(\omega) = (\cosh\omega)I + (\sinh\omega)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\omega) = (\cosh\omega)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (\sinh\omega)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\omega) = \begin{pmatrix}\cosh\omega & 0\\ 0 & \cosh\omega\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \sinh\omega\\ \sinh\omega & 0\end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\omega) = \begin{pmatrix}\cosh\omega & \sinh\omega\\ \sinh\omega & \cosh\omega\end{pmatrix}$$ [45]

Así, ya tenemos el $\Lambda(\omega)$ que aparecía en la expresión que teníamos:

$$\begin{pmatrix}x^{0\prime}\\ x^{1\prime}\end{pmatrix} = \Lambda(\omega)\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\end{pmatrix}$$

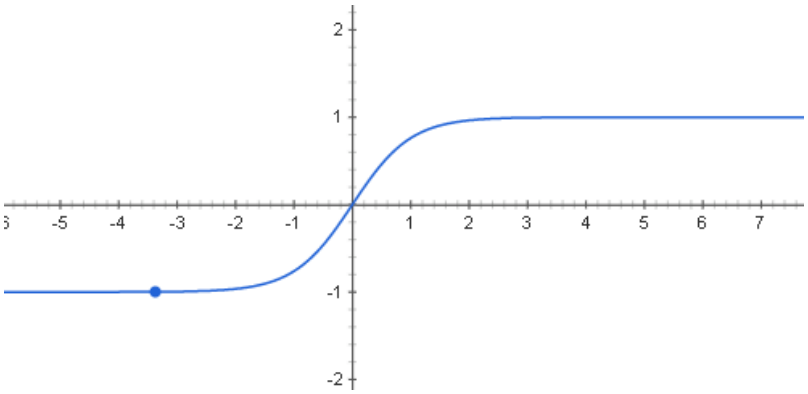
Que, obviamente, reescribimos como:

$$\begin{pmatrix}x^{0\prime}\\ x^{1\prime}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\omega & \sinh\omega\\ \sinh\omega & \cosh\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\end{pmatrix}$$

Vamos a estudiar ahora qué magnitud es la que se queda invariante cuando aplicamos esta "matriz transformadora".

Cuando era una rotación sabíamos que el módulo del vector radio permanecía invariante, ¿qué sucederá ahora que vamos a aplicar una matriz a la que le hemos cambiado un signo? Veamos, tenemos que:

$$x^{0\prime} = \cosh\omega\, x^0 + \sinh\omega\, x^1$$



Con Dominio (digamos, 'lo que entra en la función', los valores posibles de x): $(-\infty, +\infty)$, todos los reales
Con Codominio (digamos, ' lo que sale', los valores que adopta y): $(-1, +1)$

(OBSERVACIÓN: para completar, véase la nota 23 sobre el Polinomio de Taylor)

[45] Esta matriz es muy, muy importante en Relatividad Especial.

$$x^{1\prime} = \sinh\omega\, x^0 + \cosh\omega\, x^1$$

Recordemos ahora lo que hacíamos en la rotación de dos dimensiones y cómo definíamos la magnitud invariante:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 \equiv S^2$$

Cuando esto estaba, digamos, funcionando; cuando estábamos realizando una rotación propiamente dicha en dos dimensiones, se nos presentaba una identidad trigonométrica que garantizaba que la igualdad de la magnitud en la rotación se conservara. Dicha identidad era:

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1^{46}$$

(OBSERVACIÓN: es simple, desarrollando una rotación vemos que al exponenciar la matriz generadora de rotación llegamos, mediante un desarrollo en series de Taylor, a una invarianza de suma de cuadrados. La suma de cuadrados queda invariante porque la propiedad trigonométrica que estamos comentando es igual a 1. Ése 1 es el garante de que las cosas funcionen. ***Importante: véase la nota 46****)*

Ése "igual a uno" garantizaba el cumplimiento de la conservación de la magnitud. Hacía que la matriz de rotación fuera Special.

Ahora con las funciones trigonométricas hiperbólicas las cosas van a cambiar un poco. El efecto va a ser alucinante y, efectivamente, todo va a depender "sólo" del cambio de un signo (como ya hemos visto en la matriz que antes era antisimétrica y generadora de rotación y que ahora es simétrica y generadora de una Transformación de Lorentz… pero no anticipemos resultados… sigamos el hilo de nuestro estudio...)

En tal sentido, hagamos, mientras podamos, lo mismo que hicimos para las rotaciones bidimensionales. Para ello, para conseguir nuestro invariante, multipliquemos escalarmente por sí mismo el vector; empecemos elevando al cuadrado los miembros que habrán de conformar nuestra nueva expresión (como vimos para $x_1^2 + x_2^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 \equiv S^2$):

$$(x^{0\prime})^2 = (\cosh\omega\, x^0 + \sinh\omega\, x^1)^2 \rightarrow \cosh^2\omega(x^0)^2 + \sinh^2\omega(x^1)^2 + 2\cosh\omega\sinh\omega\, x^0x^1$$

$$(x^{1\prime})^2 = (\sinh\omega\, x^0 + \cosh\omega\, x^1)^2 \rightarrow \sinh^2\omega(x^0)^2 + \cosh^2\omega(x^1)^2 + 2\sinh\omega\cosh\omega\, x^0x^1$$

---

[46] Recordemos que para poder realizar transformaciones que dejaran invariante una magnitud, teníamos que emplear matrices transformadoras $SO\,(x)$, es decir Special Ortogonal. Para que dichas matrices fueran ***Special*** debía cumplirse que el determinante de la matriz fuera igual a ***UNO***. Recordémoslo para el caso de una rotación bidimensional:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \cos^2\alpha - (-\sin)^2\alpha \rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \rightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$$

Ahora, en el caso de las funciones trigonométrica hiperbólicas, tenemos que seguir garantizando ese ***UNO*** pero, como vamos a ver, para ello la expresión de la magnitud invariante va a tener que cambiar un poco. Exactamente, un signo negativo.

Pensemos ahora en una identidad trigonométrica hiperbólica (efectivamente, aquí empezamos a ver en qué cambia realmente el asunto respecto a una rotación y vamos a ver que los resultados son espectaculares) que mencionamos en la nota 44.

La cuestión es que en este nuevo escenario 'hiperbólico' resulta que sucede lo siguiente:

$$\cosh^2 A + \sinh^2 A \neq 1$$

El único modo en que podemos conservar ese '1' (garante de la invarianza de la magnitud, garante de que la matriz transformadora sea ***Special***) en la trigonometría hiperbólica es modificando la identidad (como recogíamos en la nota 44):

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1 \quad ^{47}$$

Esta nueva forma de la identidad trigonométrica, como es de imaginar, lo cambia todo.

Efectivamente, si en las rotaciones teníamos que sumar las componentes vectoriales para mantener la magnitud invariante, en este caso, digamos, hiperbólico, en el que las transformaciones son del tipo:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

---

[47] Vamos a demostrarla a partir de la definición de seno y coseno hiperbólico.
Sabemos que:

$$\cosh A = \frac{e^A + e^{-A}}{2}$$

$$\sinh A = \frac{e^A - e^{-A}}{2}$$

Así, si decimos que:

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

Tendremos que suponer que:

$$\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^A - e^{-A}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{e^A}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{-A}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right) - \left[\left(\frac{e^A}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{-A}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right)\right] = 1$$

Desarrollamos:

$$\left(\frac{e^A}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{-A}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right) - \left(\frac{e^A}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{-A}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right) = 1$$

Que simplificamos como:

$$2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^A}{2}\right)\left(\frac{e^{-A}}{2}\right) = 1$$

Es decir:

$$2\left(\frac{e^0}{4}\right) + 2\left(\frac{e^0}{4}\right) = 1$$

Que es lo mismo que:

$$2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Es decir, finalmente:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Q.E.D.

Lo que tenemos que hacer es ***RESTAR*** (véase nota 46).

Entonces tendremos que siendo:

$$(x^{0\prime})^2 = \cosh^2\omega(x^0)^2 + \sinh^2\omega(x^1)^2 + 2\cosh\omega\sinh\omega\, x^0x^1$$
$$(x^{1\prime})^2 = \sinh^2\omega(x^0)^2 + \cosh^2\omega(x^1)^2 + 2\sinh\omega\cosh\omega\, x^0x^1$$

Al restarlos tenemos que:

$$\begin{array}{r} \left(x^{0\prime}\right)^2 = \cosh^2\omega(x^0)^2 + \sinh^2\omega(x^1)^2 + 2\cosh\omega\sinh\omega\, x^0x^1 \\ -\quad (x^{1\prime})^2 = \sinh^2\omega(x^0)^2 + \cosh^2\omega(x^1)^2 + 2\sinh\omega\cosh\omega\, x^0x^1 \\ \hline \boldsymbol{\left(x^{0\prime}\right)^2 - \left(x^{1\prime}\right)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2} \end{array}$$ [48]

Y ya tenemos la expresión de la magnitud invariante asociada a esta transformación. ***La Transformación aplicable a la Relatividad Especial.***

Donde:

$$x^0 \equiv ct \quad [49]\ (coordenada\ temporal)$$
$$x^1 \equiv x \qquad (coordenada\ espacial)$$

(OBSERVACIÓN: para un espacio/tiempo de una sola dimensión espacial. Por otro lado, cabe resaltar ahora lo veremos cuando abordemos el concepto de métrica, que lo habitual es poner la componente temporal con signo negativo y la espacial en positivo (aunque también se ve la viceversa). Lo importante, de todas formas, es conservar la proporción negativa/positiva)

Por lo que podemos reescribir como:

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$$

Que es a lo que Einstein llamaba "una magnitud invariante bajo las transformaciones de Lorentz".

Es decir, que a través de la transformación:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

[48] Aunque es obvio, por partes se ve que:
1- $\cosh^2\omega(x^0)^2 - \sinh^2\omega(x^0)^2$
   a. Sacamos factor común: $(x^0)^2 \cdot (\cosh^2\omega - \sinh^2\omega) \rightarrow (x^0)^2 \cdot (1)$
2- $\sinh^2\omega(x^1)^2 - \cosh^2\omega(x^1)^2$
   a. Sacamos factor común: $(x^1)^2 \cdot (\sinh^2\omega - \cosh^2\omega) \rightarrow (x^1)^2 \cdot (-1)$
3- $2\cosh\omega\sinh\omega\, x^0x^1 - 2\cosh\omega\sinh\omega\, x^0x^1 = 0$

[49] No nos preocupemos de momento por esta ct que parece haber salido de la nada. En breve vamos a conocer, perfectamente, por qué definimos el tiempo como ct.

Hemos llegado a un postulado fundamental, importantísimo, de la Relatividad Especial:

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$$[50]

[50] A esto es a lo que se llega, como hemos dicho, cuando cambiamos la matriz antisimétrica de las rotaciones por una matriz simétrica (es alucinante a las cosas que se llegan "jugueteando" con las matrices generadoras, ¿ehn?).

-1.6-

La métrica (… y II)

$\int$

Para empezar, y como ya hemos dicho, es fundamental centrar nuestra atención en el ***SIGNO NEGATIVO*** que aparece en la magnitud invariante en el 'mundo hiperbólico'.

Antes, en las rotaciones, teníamos un signo ***POSITIVO*** en la expresión que constituía el *Escalar Invariante de Lorentz* al que llegábamos mediante el producto escalar de un vector por sí mismo (véase ***página 26***):

$$(x^0 \quad x^1) \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = (x^0)^2 + (x^1)^2$$

Ahora, sin embargo, necesitamos un signo ***NEGATIVO***:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 \quad [51]$$

Para ello vamos a tener que introducir un '*factor corrector*' en el procedimiento de 'elaboración' de la magnitud invariante. Para ello haremos lo siguiente:

$$(x^0 \quad x^1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \rightarrow (x^0 \quad x^1) \cdot \begin{pmatrix} x^0 & 0 \\ 0 & -x^1 \end{pmatrix} = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

Donde, precisamente, esa '*matriz correctora*' es a lo que llamaremos ***Métrica***:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} [52]$$

Pero… ¿Qué es la ***Métrica***?

Empezaremos diciendo que la métrica define las propiedades que tiene el espacio al que está asociada. En ella se recogen los elementos fundamentales que nos van a permitir

[51] ¿A qué nos suena esta expresión?... La hipérbola… Los fenómenos Relativistas encajan en un "mundo" donde "las curvas que relacionan diferentes magnitudes" son Hipérbolas. Ya veremos la importancia de estas curvas para calibrar ejes en la representación gráfica de eventos relativistas.

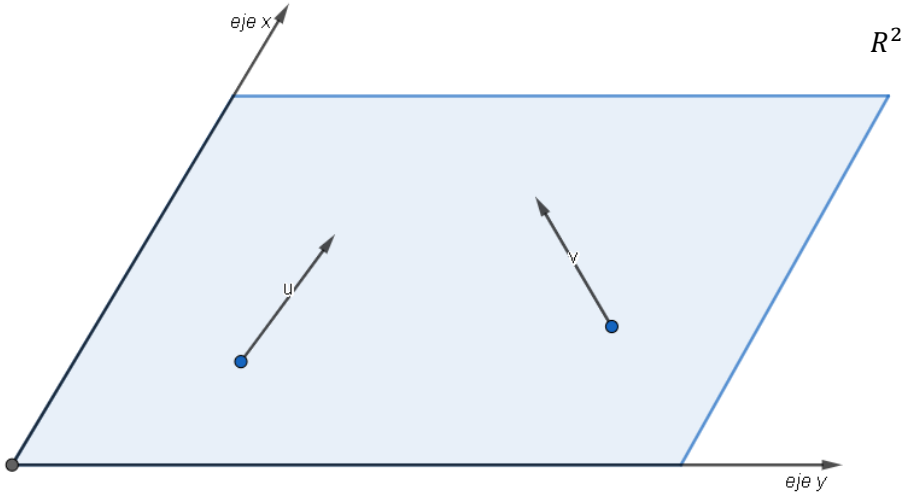
[52] A la Métrica, en Relatividad Especial, se le denomina con la letra η, mientras que en Relatividad General se la denomina con la letra g .

conocer el modo en que se comporta dicho espacio y, muy importante, el modo en que se mide en el seno del éste.

La definición de la métrica de un espacio está vinculada a cómo se realiza el producto escalar en el mismo. Es decir, el producto escalar (que no deja de ser la suma de muchas sumas; la acumulación de sumas; medir) define el modo en que se opera en un espacio y, en tal sentido, la métrica recoge el modo en que se ejecuta el producto escalar.

¿Cómo se ejecuta el producto escalar? Veamos qué quiere decir esto con un ejemplo[53].

Imaginemos el escenario más simple: un espacio euclídeo (R^2), plano, de dos dimensiones en el que podemos dibujar diferentes vectores (por ejemplo $\vec{u}$ o $\vec{v}$):



Ahora vamos a definir una serie de propiedades para este espacio:

- Es euclídeo: por ello plano, isomorfo, bla, bla, …
- Definimos una operación[54], que representamos como "·", tal que un vector, por ejemplo, $\vec{u}$, operado contra sí mismo arroja un resultado de u^2. Es decir:
  $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$ (es decir, el *vector* se convierte en *área*).
- Los cálculos que se hacen con esta *operación misteriosa* son lineales, esto es, que cuando combinemos elementos del tipo $(AB)(CD)$ tendremos resultados del tipo $(AC\ AD\ BC\ BD)$.
- Las combinaciones son simétricas, es decir, conmutativas: $AB = BA$
- Si definimos una base vectorial con los dos vectores $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$ debe resultar que[55]:

[53] Esto que vamos a hacer para dos dimensiones se extiende sin problemas a espacios de n dimensiones.

[54] Aún no sabemos qué clase de operación es ésta que hemos representado con un punto. Efectivamente, resultará que es el producto escalar pero, de momento, sólo estamos definiendo una serie de propiedades que tiene el espacio que estamos definiendo.

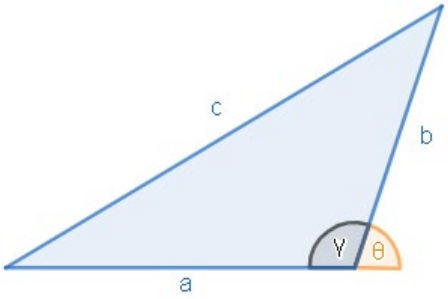
[55] En esto pudiera parecer que hay un cierto razonamiento circular pero a nada que se piense veremos que no es así pues el producto que recogemos a continuación no debemos verlo realmente como un producto escalar en el espacio que se define sino como una relación de dependencia e independencia lineal (véanse notas 33,34 y 35).

- $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = 1$
- $\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 1$
- $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$

Ahora, podríamos empezar a aplicar, en dicho espacio, diferentes teoremas que, debido a las propiedades definidas, deberían funcionar sin problemas. Vamos a aplicar el Teorema del coseno (también podríamos usar Pitágoras, pero quizás sea más simple llegar a donde queremos usando el del coseno).

TEOREMA DEL COSENO

Dado un Triángulo ABC:



Se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Dicho esto, si nos fijamos en la ilustración, vemos que:

$$\gamma = 180º - \theta$$

Es decir:

$$\cos\gamma = \cos(\pi - \theta)$$

Que, por una identidad trigonométrica fundamental (es fácil apreciar su certeza), podemos reescribir como:

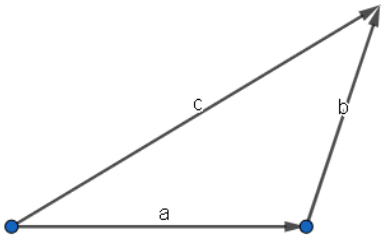
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

Esto nos permite reescribir $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ como:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

Y esto, en el espacio que estamos definiendo, es perfectamente válido.

Ahora, replanteemos el asunto como si fuera una relación entre vectores:



Donde el vector $\vec{c}$, obviamente, es la suma de los vectores (*cabeza de* $\vec{a}$ *con cola de* $\vec{b}$) $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Que conjuntamente con el Teorema del coseno podemos reescribir como:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2ab\cos\theta$$

Donde podemos sustituir $\vec{c}$ por $\vec{a} + \vec{b}$, dejándonos:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2ab\cos\theta$$

Y, como hemos dicho que la operación en el espacio soporta la simetría (conmutatividad) y es lineal, podemos desarrollar como se hace desde toda la vida:

$$a^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

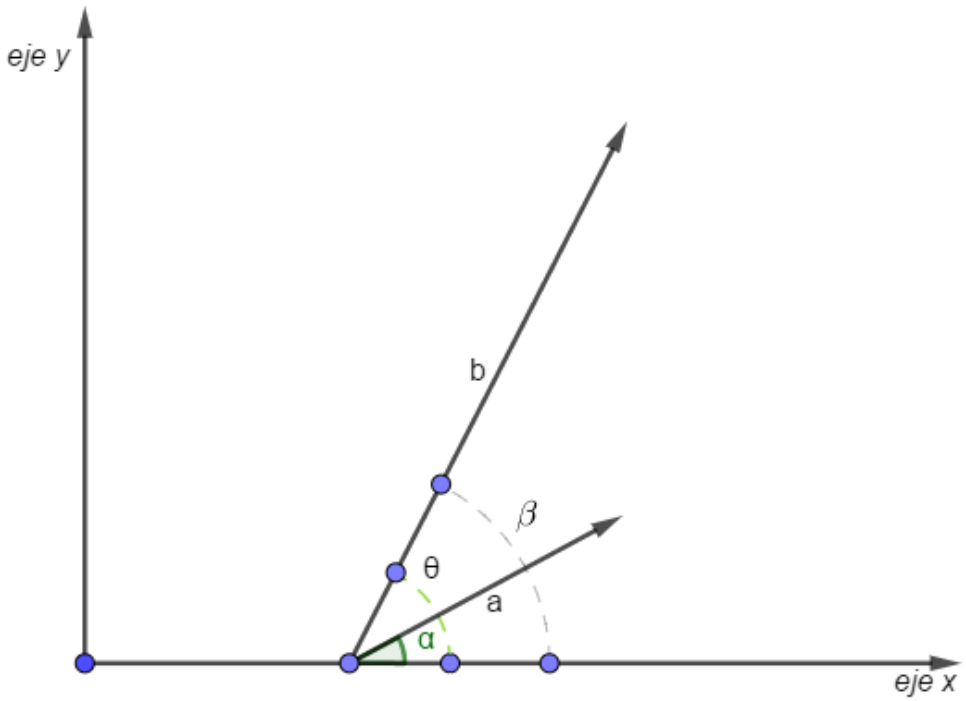
Es decir:

$$\cancel{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = \cancel{2}ab\cos\theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

Es decir que parece que el producto escalar entre vectores (cumpliendo las condiciones que hemos impuesto) se define como el producto de la longitud del vector $\vec{a}$ por la longitud del vector $\vec{b}$ por el coseno del ángulo que forman ambos vectores.

De esta definición, podemos extraer otro un Teorema. Veamos el siguiente esquema:



Tenemos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

- $\vec{a}$ forma un ángulo de α grados con el eje x.
- $\vec{b}$ forma un ángulo de β grados con el eje x.
- En ángulo que forma $\vec{a}$ con $\vec{b}$ es θ, donde:
  - $\theta = \beta - \alpha$, luego
  - $\cos\theta \rightarrow \cos(\beta - \alpha) = (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)$

Así, la proyección del vector $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ (el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$), pasaría de ser:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\theta$$

Es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot (\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)$$

Desarrollando:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha + a \cdot b \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

Que reordenando:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot \cos\alpha \cdot b \cdot \cos\beta + a \cdot \sin\alpha \cdot b \cdot \sin\beta$$

Donde tenemos que:

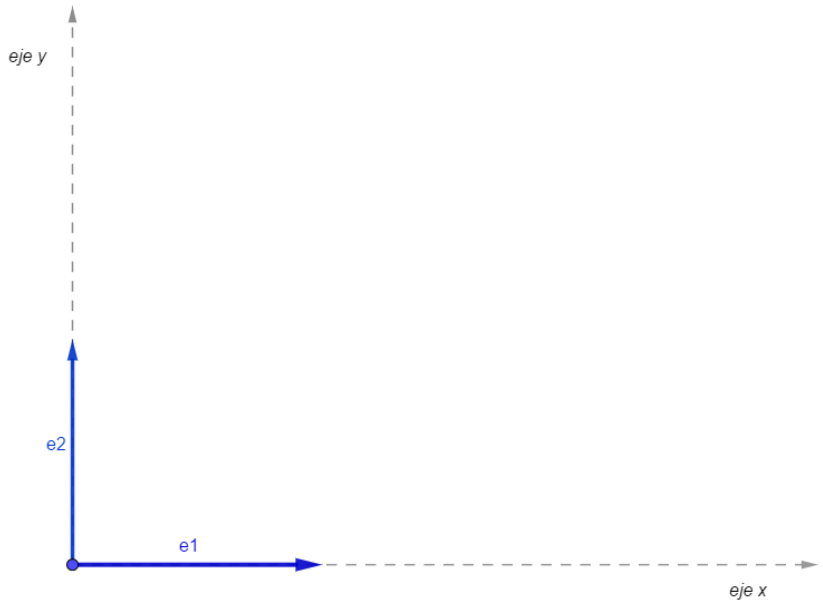
- $a \cdot \cos\alpha$ no es otra cosa que la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje x, es decir, la componente en x del vector $\vec{a}$. Llamémosla a_x.
- $b \cdot \cos\beta$ no es otra cosa que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el eje x, es decir, la componente en x del vector $\vec{b}$. Llamémosla b_x.

- $a \cdot \sin \alpha$ no es otra cosa que la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje y, es decir, la componente en y del vector $\vec{a}$. Llamémosla a_y.
- $b \cdot \sin \beta$ no es otra cosa que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el eje y, es decir, la componente en y del vector $\vec{b}$. Llamémosla b_y.

De manera que finamente podremos definir (y esto seguro que nos suena) que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Ahora definamos una base vectorial para este espacio de dos dimensiones. Sea dicha base (usando la nomenclatura que ya hemos usado en este epígrafe):



Estos dos vectores, como es obvio, conforman una base vectorial del espacio bidimensional que estamos definiendo y, por lo tanto, se cumple que:

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = 1;\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 1;\ \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$$

Así, podremos estudiar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como la suma de otros vectores definidos mediante un escalar (la magnitud de cada componente $a_x a_y$ y $b_x b_y$) por cada una de los vectores que conforman la base que definen las dos direcciones posibles, ortogonales, en nuestro espacio, es decir:

$$\vec{a} = a_x \cdot \overrightarrow{e_1} + a_y \cdot \overrightarrow{e_2}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \overrightarrow{e_1} + b_y \cdot \overrightarrow{e_2}$$

Como sabemos que la operación que estamos definiendo en el espacio es lineal, podremos desarrollar del siguiente modo (como ya hemos hecho antes):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \overrightarrow{e_1} + a_y \overrightarrow{e_2}\right) \cdot \left(b_x \overrightarrow{e_1} + b_y \overrightarrow{e_2}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \overrightarrow{e_1} b_x \overrightarrow{e_1} + a_x \overrightarrow{e_1} b_y \overrightarrow{e_2} + a_y \overrightarrow{e_2} b_x \overrightarrow{e_1} + b_x \overrightarrow{e_1} + a_y \overrightarrow{e_2} b_y \overrightarrow{e_2}$$

Que, si reordenamos, nos muestra algo que ya conocemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + a_x b_y \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + a_y b_x \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + a_y b_y \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}$$

Y como hemos impuesto que:

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = 1;\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 1;\ \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$$

Podremos decir que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + \cancel{a_x b_y \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}} + \cancel{a_y b_x \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}} + a_y b_y \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + a_y b_y \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}$$

Es decir, llegamos de nuevo a:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

En un espacio en que hemos definido su base como:

$$R^2 \ / \ \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} \ / \ \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$$[56]

De manera que, presentando las diferentes posibles combinaciones posibles de los vectores que conforman la base vectorial, obtendríamos la métrica de, en este caso, un espacio euclídeo, cartesiano:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por supuesto, lo interesante de las métricas, (que se basan, como hemos visto, en la definición del producto escalar) es que recogen las propiedades del espacio en el que estamos trabajando.

Veamos ahora un ejemplo en el que el espacio es algo más extraño. Hasta este momento hemos trabajado en espacios en los que la *ortogonalidad* está definida como un ángulo de 90º pero, ¿qué sucedería si definimos un espacio mediante una base vectorial en la que los vectores no hagan 90º? Pues muy simple, que la *ortogonalidad* dentro de ese espacio estaría definida por un ángulo diferente.

Imaginemos algo así: alguien que ha vivido siempre en un espacio cuya máxima amplitud de un cuarto de giro fuera, por ejemplo, 60º, ¿no estaría definiendo la *perpendicularidad* como un ángulo de 60º? Nosotros, desde nuestro mundo, desde fuera, veríamos que su mundo es como *oblicuo,* pero, para ellos, sin lugar a dudas, un giro completo sería la suma de 4·60º, es decir, su circunferencia, como mucho tendría 240º.

Las métricas, precisamente, nos van a dar información, justamente de eso: de la naturaleza del espacio en el que estamos trabajando.

[56] δ_{ij} es lo que se denomina la delta de ***Kronecker*** es una función de dos variables, que vale 1 si son iguales, y 0 si son diferentes.

Veamos, colmo decimos, un ejemplo. Definamos una base no euclídea, una base *rara*, un espacio al estilo del *mundo oblicuo* como el que acabamos de referir hace unas líneas. Supongamos que la base vectorial de dicho espacio está definida por dos vectores:

- $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ donde $\boldsymbol{\overrightarrow{u_1}} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ y $\boldsymbol{\overrightarrow{u_2}} = \overrightarrow{e_2}$ [57]

La métrica que nos dejará esta base vectorial será notablemente diferente. Veámoslo miembro a miembro mediante el delta de Kronecker:

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) \cdot (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}$$

$$= 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

$$\boldsymbol{\delta_{12}} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0 + 1 = 1$$

$$\boldsymbol{\delta_{21}} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2} \cdot (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0 + 1 = 1$$

$$\boldsymbol{\delta_{22}} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = 1$$

Es decir, que la métrica de este espacio *raro* es:

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El ***producto escalar*** bajo esta ***métrica es diferente*** al producto escalar bajo la métrica de Euclides.

Efectivamente, bajo esta métrica, un vector por sí mismo seguirá siendo así:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

Pero, la salvedad es que el producto vectorial será diferente pues donde antes teníamos, en los delta de Kronecker con subíndices diferentes, un 0 que anulaba un factor, aquí tenemos un 1 de manera que el producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ bajo esta nueva métrica será:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_1} + a_x b_y \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_2} + a_y b_x \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_1} + a_y b_y \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_2}$$

(OBSERVACIÓN: en la métrica del espacio euclídeo el producto escalar se define 'sólo' como: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_1} + a_x b_y \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_2} + a_y b_x \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_1} + a_y b_y \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_2}$ *(los términos en rojo son cero y se eliminan en el espacio euclídeo), mientras que en el nuevo espacio 'oblicuo' el producto escalar requiere, efectivamente, de todos los términos)*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_1} + a_x b_y \overrightarrow{u_1} \overrightarrow{u_2} + a_y b_x \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_1} + a_y b_y \overrightarrow{u_2} \overrightarrow{u_2})$$

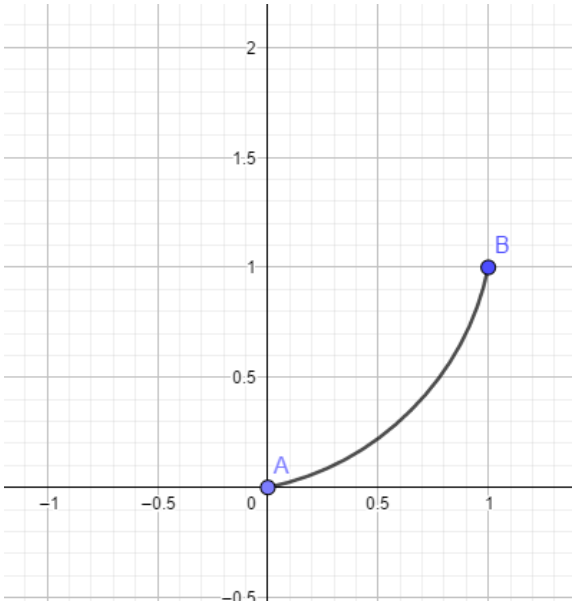
---

[57] Podemos llegar a preguntarnos, ¿por qué usamos de nuevo las bases euclídeas $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$? Muy sencillo, porque, digamos, estamos estudiando ese mundo raro, oblicuo, desde el nuestro. Usamos nuestras referencias para definir ese espacio raro que vemos desde "*aquí*". No en vano, ya vemos que el primer vector de la base no es $\overrightarrow{e_1}$, sino $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, es decir: estamos ante un *espacio raruno*. Esta simple modificación en la definición de un vector base lo va a cambiar todo. Digamos que ellos, *los habitantes de ese espacio*, nos verían a nosotros como *alargados* pero, en cambio, desde nuestro mundo lo perpendicular, lo normal, es lo vemos aquí mientras que lo oblicuo, lo '*como aplastado*', es lo de ellos. Por eso, bajo nuestro punto de vista lo vemos torcido, porque al multiplicar un vector por sí mismo allí da cosas raras: 2 (según nuestro punto de vista), y no el cómodo 1 que nos da aquí.

Veamos ahora un ejemplo de cómo, mediante la definición del producto vectorial entre vectores, podremos medir la longitud de una curva definida, por ejemplo, por la ecuación:

$$y = x^2$$

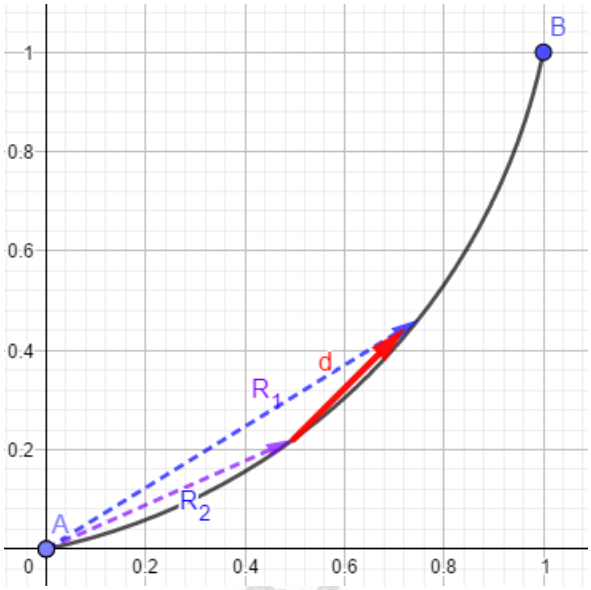
Desde el punto $A = 0$ al punto $B = 1$:



Lo primero que vamos a hacer es definir la métrica de nuestro espacio (euclídeo):

$$\eta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo siguiente que haremos será imaginar un vector $\vec{R}$, con base en el origen, cuya *cabeza* pueda ir recorriendo la curva de manera que, entre dos posiciones aleatorias de dicho vector, podamos calcular un distancia d:



De manera que, efectivamente, esa diferencia no será otra cosa que una diferencia de vectores:

$$\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1} = \vec{d}$$

(OBSERVACIÓN: lo que vamos a hacer es considerar el vector $\mathbf{d}$ *de un tamaño deferencial y, después, sumarlo infinitas veces desde* A *hasta* B*)*

Naturalmente, como hemos visto, podremos apelar al producto escalar para proponer que debe cumplirse que:

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = d^2$$

Es decir:

$$\left(\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}\right) = |\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}|^2$$

Donde:

$|\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}|^2$ es una distancia, que vamos a expresar como $(\Delta d)^2$.

Por otro lado, reformulemos los vectores $\overrightarrow{R_1}$ y $\overrightarrow{R_2}$ como la suma de la magnitud de sus componentes multiplicadas por sus correspondientes bases vectoriales (que vamos a coger de los elementos que componen la *matriz métrica*):

$$\overrightarrow{R_1} \cdot \eta = \begin{pmatrix} R_{1x} & R_{1y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{1x} \cdot 1 + R_{1y} \cdot 0 + R_{1x} \cdot 0 + R_{1y} \cdot 1 = R_{1x} \cdot 1 + R_{1y} \cdot 1$$

$$\overrightarrow{R_2} \cdot \eta = \begin{pmatrix} R_{2x} & R_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{2x} \cdot 1 + R_{2y} \cdot 0 + R_{2x} \cdot 0 + R_{2y} \cdot 1 = R_{2x} \cdot 1 + R_{2y} \cdot 1$$

(obviamente, lo marcado en color rojo, se anula)

$$\Delta d = \overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1} = \left(R_{2x}\delta_{11} + R_{2y}\delta_{22}\right) - \left(R_{1x}\delta_{11} + R_{1y}\delta_{22}\right)$$

Que reordenando es:

$$\Delta d = \overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1} = (R_{2x}\delta_{11} - R_{1x}\delta_{11}) + \left(R_{2y}\delta_{22} - R_{1y}\delta_{22}\right)$$

Sacamos factor común y tenemos:

$$\Delta d = (R_{2x} - R_{1x})\delta_{11} + \left(R_{2y} - R_{1y}\right)\delta_{22}$$

En definitiva, como era de esperar:

$$\Delta d = (\Delta_x)\delta_{11} + \left(\Delta_y\right)\delta_{22}$$

Pero, ojo, recordemos que todo esto era al cuadrado:

$$\Delta d^2 = \left((\Delta_x)\delta_{11} + \left(\Delta_y\right)\delta_{22}\right)^2$$

Que desarrollamos como:

$$\Delta d^2 = (\Delta_x)^2\delta_{11} + \left(\Delta_y\right)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)\left(\Delta_y\right)\delta_{11}\delta_{22}$$[58]

Que, despejando el cuadrado del término izquierdo nos queda como:

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta_x)^2\delta_{11} + (\Delta_y)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)(\Delta_y)\delta_{11}\delta_{22}}$$

Pero, como hemos dicho, las distancias que estamos midiendo no deben ser 'macro-distancias' sino diferenciales sumados infinitamente desde A hasta B por lo que saltaremos de ***diferencia*** a ***diferencial***:

$$\int_A^B \Delta d = \int_A^B \sqrt{(\Delta_x)^2\delta_{11} + (\Delta_y)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)(\Delta_y)\delta_{11}\delta_{22}}$$

Ahora, para poder calcular la longitud de todo esto lo que vamos a hacer es ***parametrizar la curva***. ¿Qué es esto? Muy simple: volver a ponerlo todo en función de otra variable que, digamos, será la recorrerá deslizándose sobre la función (un punto que la recorrerá) y que nos ayudará a sumar cada posición infinitesimal.

Pongamos la ecuación que nos definía la curva en función de una variable arbitraria, por ejemplo, para:

$$y = x^2$$

Definamos que:

$$x = \varphi \quad ^{59}$$

Y, análogamente:

$$y = \varphi^2$$

A continuación, multipliquemos esto:

$$\int_A^B \sqrt{(\Delta_x)^2\delta_{11} + (\Delta_y)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)(\Delta_y)\delta_{11}\delta_{22}}$$

Por uno (y aquí está la verdadera parametrización) en forma de:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi}$$

Estaremos de acuerdo en que eso es 1 y que, además, para meterlo (al menos el denominador) en nuestro término bajo una raíz cuadrada, tendremos que hacerlo así:

$$\int_A^B \sqrt{(\Delta_x)^2\delta_{11} + (\Delta_y)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)(\Delta_y)\delta_{11}\delta_{22}} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi}$$

---

[58] Nota importante: sabemos que δ_{11} es un vector de la base vectorial; δ_{22} es otro vector de la base vectorial, por lo que $\delta_{11} \cdot \delta_{22}$ debe ser necesariamente 0, es decir, es una combinación de los dos. Podríamos sustituirlo por δ_{12} o δ_{21} (recordemos que es un espacio conmutativo).

[59] Tranquiiiiilo, que no es lo mismo, ahora lo veremos….

$$\int_A^B \sqrt{\left((\Delta_x)^2\delta_{11} + (\Delta_y)^2\delta_{22} + 2(\Delta_x)(\Delta_y)\delta_{11}\delta_{22}\right)\cdot\frac{1}{d\varphi^2}} \quad d\varphi$$

$$\int_A^B \sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{d\varphi}\right)^2\delta_{11} + \left(\frac{\Delta_y}{d\varphi}\right)^2\delta_{22} + 2\left(\frac{\Delta_x}{d\varphi}\right)\left(\frac{\Delta_y}{d\varphi}\right)\delta_{11}\delta_{22}} \quad d\varphi$$

Ya podemos empezar a operar:

$$\left(\frac{\Delta_x}{d\varphi}\right)^2$$

Donde:

$$x = \varphi$$

$$\left(\frac{\varphi}{d\varphi}\right)^2 \rightarrow (1)^2$$ [60]

Y ahora:

$$\left(\frac{\Delta_y}{d\varphi}\right)^2$$

Donde:

$$y = \varphi^2$$

$$\left(\frac{\varphi^2}{d\varphi}\right)^2 = (2\varphi)^2$$

Luego, finalmente, tenemos:

$$\int_A^B \sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{d\varphi}\right)^2\delta_{11} + \left(\frac{\Delta_y}{d\varphi}\right)^2\delta_{22} + 2\left(\frac{\Delta_x}{d\varphi}\right)\left(\frac{\Delta_y}{d\varphi}\right)\delta_{11}\delta_{22}}$$

$$\int_A^B \sqrt{(1)^2\delta_{11} + (2\varphi)^2\delta_{22} + 2(1)(2\varphi)\delta_{11}\delta_{22}}$$

Y esta es la genialidad de la métrica. Como sabemos que:

$$\delta_{11} = 1$$

$$\delta_{22} = 1$$

Y, necesariamente (véase nota 56):

$$\delta_{11}\delta_{22} = 0 \rightarrow \delta_{12} \leftrightarrow \delta_{22}\delta_{11} = 0 \rightarrow \delta_{21}$$

[60] La derivada de φ respecto a $d\varphi$ es 1 (véase sección de cálculo).

Es decir, esto que estamos haciendo es perfectamente genérico para cualquier métrica de $2x2$. Sencillamente, según sea la métrica, los parámetros δ_{ij} adoptarán los valores oportunos.

Por lo que la expresión, definitivamente, nos queda como:

$$\int_A^B \sqrt{1 + 4\varphi^2 + \cancel{2(1)(2\varphi)\mu_{11}\mu_{22}}}$$

Y siendo $A \rightarrow \varphi = 0$ y $B \rightarrow \varphi = 1$:

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=1} \sqrt{1 + 4\varphi^2}$$

Que es:

$$\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \sinh^{-1}(2)\right) \approx 1.4789\ unidades\ lineales$$ [61]

Resumiendo, y retornando a nuestro hilo conductor principal, podríamos decir que la ***métrica***, por decirlo de alguna manera, define las propiedades, el comportamiento, del "entorno" en el que se producen los eventos estudiados. Por ejemplo, en una rotación normal y corriente, en un espacio euclídeo isomorfo de 2 dimensiones, bla, bla, … la métrica será la identidad:

$$\begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Identidad que, naturalmente, podemos ahorrarnos de reflejar en la expresión:

$$\begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, en Relatividad Especial la métrica es 'ligeramente' diferente, como hemos visto.

Dicho esto, maticemos algo referente a los vectores y su "relación con las métricas que los condicionan/conforman". Hasta ahora hemos hablado de vectores, sin especificar dónde se "desenvolvían". Esto no es del todo correcto pues, cuando nos referimos a un vector, hemos de hacerlo haciendo referencia al "espacio" en que se despliegan y cuya naturaleza (la del espacio) está definida en su métrica. Así podemos estar ante:

$$un\ vector \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} bajo\ rotaciones: \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$un\ vector \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} bajo\ Lorentz: \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

[61] Para cualquier duda, insistimos, ir al Apéndice I. Acerca del Cálculo Diferencial e Integral. De cualquier manera, cualquier software de cálculo de integrales nos aporta este resultado (p. ej: Wolfram Alpha Mathematica).

Dicho vector, antes incluso de empezar a "funcionar" en el ámbito que sea, "se viste antes de salir al escenario", se "prepara", se "acicala"[62] mediante la aplicación de una métrica η. Una vez está "listo para saltar a la acción" tras aplicarle la métrica, se le llama Vector Dual y ya está listo para desplegarse en el ámbito en que va a trabajar (rotaciones, Transformaciones de Lorentz, …).

Así, nuestro Vector Dual que va a trabajar bajo Transformaciones de Lorentz:

$$pasa\ de\ ser: \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\end{pmatrix}\rightarrow I\cdot\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\end{pmatrix}\ a\ ser\ \rightarrow\boldsymbol{\eta}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x^0}\\ \mathbf{x^1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\mathbf{x^0}\\ \mathbf{-x^1}\end{pmatrix}^{63}$$

En Relatividad Especial se distingue siempre el signo del tiempo del resto de dimensiones espaciales. Da igual si se pone el tiempo en negativo y el espacio en positivo o viceversa, lo importante es que tengan signos diferentes.

Por ejemplo, los dos ejemplos que presentamos a continuación son correctos para un espaciotiempo de una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales[64]:

$$\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\end{pmatrix}\rightarrow\eta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\end{pmatrix}\rightarrow\eta=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Lo importante es que la ***dimensión temporal sea de signo diferente*** al resto de dimensiones espaciales.

Esto requiere algunas reflexiones interesantes. ¿Por qué el signo negativo del tiempo? Tras reflexionar sobre el asunto se puede llegar a pensar que el tiempo, en la métrica de Minkowski, es un eje "*adimensional*" respecto los otros tres ejes espaciales y que se despliega en la componente imaginaria (i), linealmente independiente pero en el sentido de '*dimensionalmente independiente*'… como que se adentra en otro tejido diferente (claro, un tejido temporal, no espacial). Por eso tiene un signo negativo.

En el Espacio Euclídeo la "morfología" de las dimensiones son iguales, es decir, las dimensiones tienen, digamos, "la misma naturaleza" y, aunque apunten a direcciones diferentes, tienen un comportamiento, podríamos decir, "*homogéneo-coherente-de la misma familia*". Esto que acabamos de decir de una manera tan heterodoxa podríamos expresarlo mejor diciendo que son Dimensiones Isotrópicas.

---

[62] Siento estos términos, pero busco que se entienda todo perfectamente.

[63] Al final de la presente sección incorporaremos un apéndice en el que contrastaremos esta notación que estamos empleando con la notación que empleó Einstein y que, por ello, es la canónica en este tipo de desarrollos.

[64] La Planilandia de Edwin A. Abbott.

Así, dentro del Espacio Euclídeo, la conversión entre coordenadas de dos sistemas de referencia diferentes se podría representar mediante una matriz del tipo:

	x'	y'	z'
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

Esto queda así definido por la propia métrica del Espacio Euclídeo. La métrica de un espacio, ya lo hemos adelantado, no es otra cosa que el comportamiento del espacio entre dos puntos. Naturalmente, si conocemos cómo se comporta el espacio en la distancia que separa a dos puntos, podremos conocer (siempre y cuando se trate de un espacio homogéneo, isotrópico, "igual en todos lados", sin deformaciones locales) la naturaleza del espacio en el que están esos dos puntos. En la matriz anterior, de cualquier modo, lo que observamos es que x se relaciona con x' en términos de "misma naturaleza" (tienen el mismo signo) y "misma cantidad". Vemos, entonces, en la métrica del Espacio Euclídeo, una relación entre "iguales". 1 a 1, si es que las distancias, por los motivos que sean, se conservan en términos de igualdad. También podría darse (ya lo hemos visto) que por una naturaleza peculiar del espaciotiempo, supongamos, el "lecho *flexible-goma* espacial" sobre el que se desarrolla una transformación fuera flexible en el eje x y, dicha dimensión, estuviera como "estirada" de manera que un cambio en x supusiera, por ejemplo, el doble de movimiento en x' que en x. El factor de relación entre ambos ejes se representaría así:

	x'	y'	z'
x	2	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

Pero, y esto es lo importante, seguirían siendo dimensiones de la misma naturaleza, seguirían siendo dimensiones que se expresarían en resultados "reales"; en números reales.

Sin embargo Minkowski pensó (tal como expuso en su discurso de inauguración de la 80 reunión de la Asamblea general alemana de científicos naturales y físicos el 21 de septiembre de 1908) en otro modo de concebir el espacio: incluir el tiempo como una dimensión más, una dimensión de componente imaginaria ($i = \sqrt{-1}$). Un espacio-tiempo de 4 dimensiones.

Esta nueva dimensión, 'intrusa', tiene una naturaleza diferente (¡de hecho no es espacial!) y, como tal, podríamos decir que "no es de la familia" de nuestras cómodas e intuitivas x, y, z. De hecho, lo que tendríamos que imaginar (y decimos imaginar porque visualizarlo es francamente difícil, por no decir imposible) es un espacio de 3 dimensiones al que se le

añade una dimensión más que es *como perpendicular* a las tres dimensiones ya conocidas (¡jodido de imaginar!).

Así, la métrica del espacio de Minkowski se puede expresar matricialmente del siguiente modo:

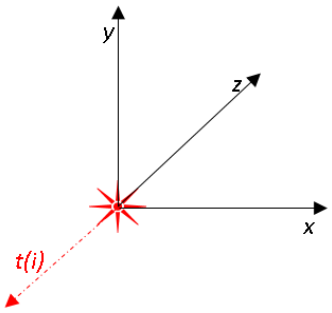
$$\eta = \begin{pmatrix} 1i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el espacio de Minkowski[65] y en Relatividad, se puede trabajar perfectamente con componentes imaginarias pero, para evitar tener que trabajar con números complejos todo el tiempo y con el fin de hacer los cálculos menos engorrosos, la métrica de Minkowski se puede expresar perfectamente del siguiente modo:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

He ahí el cambio de signo. Un signo negativo que, como ya sabemos, lo cambia todo.

De hecho, puestos a visualizar, más o menos podríamos tener en mente algo como esto:



Donde el icono que, en el origen de coordenadas, parece una especie de sol o estallido rojo en el origen de coordenadas, representa una especia de agujero en el papel, una especia de paso a otra nueva dimensión (la cuarta nada más y nada menos), en la que se despliega el tiempo.

Ahondemos un poco más en esto.

Supongamos que estamos en un Espacio Euclídeo de 3 dimensiones al que añadimos una 4ª dimensión que es el tiempo (de nuevo: jodido de imaginar). Ahora supongamos que desde el origen de coordenadas…:

[65] Gracias a los complejos garantizamos que el producto escalar rudimentario (suma de componentes al cuadrado) que algunas tomen el signo negativo. No obstante, el uso de números complejos está mal visto desde dentro de la física teórica.

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

… Lanzamos un rayo de luz. Se generará una esfera de luz (a causa de la distribución radial de la radiación) y se cumplirá, por Pitágoras, que la distancia de la superficie de la esfera al origen será:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = ct^2$$

Esto es una ecuación en forma ***explícita*** que podemos asociar a una esfera que está creciendo en función del tiempo. Si encendemos una luz en el eje de coordenadas, se creará una esfera de luz cuyo radio crece con el tiempo a la velocidad de la luz.

Podemos expresar la ecuación anterior de manera ***implícita*** del siguiente modo:

$$ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Ecuación que, muy importante, siempre será cierta para cualquier observador cuando hablemos de la luz emitida desde el origen (recordemos, el Segundo Postulado de la Relatividad Especial: la velocidad de la luz es constante para cualquier observador). Por ello, podríamos decir que:

$$ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \equiv ct'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \equiv S^2$$

Es decir, atendiendo a los signos del polinomio, acabaremos representando la métrica de Minkowski expresada como ya hemos dicho:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

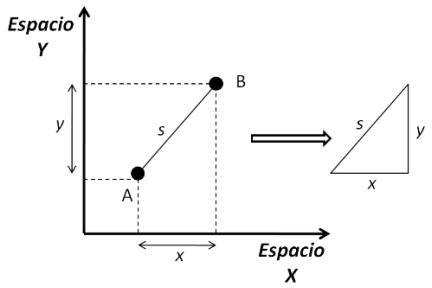
El caso es que en los libros y manuales aún no hay unanimidad sobre si proponer tres imaginarias y una real o tres reales y una imaginaria. Lo único importante, en todo caso, es que la proporción de signos negativos y positivos se mantenga, es decir, que sea 3/1 ó 1/3.

-1.7-

Relatividad Especial. La representación gráfica de eventos Relativistas

Como ya sabemos, la Relatividad Especial, aborda fenómenos tal y como los perciben observadores situados en sistemas inerciales, es decir, que no sufren aceleraciones. En dicho sentido, estamos ante un espaciotiempo cuatridimensional plano[66] que se deforma cuando los cuerpos se mueven en su seno a cualquier velocidad (aunque nosotros sólo podríamos percibir los efectos cuando están involucradas velocidades cercanas a la luz, como vamos a ver).

En primer lugar, vamos a analizar cómo podríamos representar gráficamente un fenómeno, un evento, acaecido en un contexto de Relatividad Especial. Para ello, antes que nada, pensemos en el paradigma Newtoniano, en el que el espacio y el tiempo son magnitudes independientes de los objetos que los ocupan. Si suponemos un espacio de dos dimensiones xy, podremos representar cualquier punto, o conjunto de puntos, mediante sus coordenadas en cada uno de los ejes correspondientes (x, y). Veamos un ejemplo:



Se puede ver fácilmente que la distancia entre los puntos *A* y *B*, no es sino la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos conocemos:

$$cateto\ en\ x = x_1 - x_0 \rightarrow \Delta x$$

$$cateto\ en\ y = y_1 - y_0 \rightarrow \Delta y$$

[66] La Relatividad General la dejaremos para más tarde, donde se incluirá la gravedad como una aceleración que curva el espaciotiempo.

Por lo que podremos definir la distancia, por Pitágoras, como:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Naturalmente, si medimos los catetos en una unidad determinada, el resultado que obtengamos para la *distancia-hipotenusa*, nos vendrá dada en la misma unidad, por ejemplo, centímetros.

Estas consideraciones podemos extenderlas, sin problema alguno, a un espacio de tres dimensiones de manera que la distancia entre los dos puntos A y B sería del tipo:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta y)^2$$

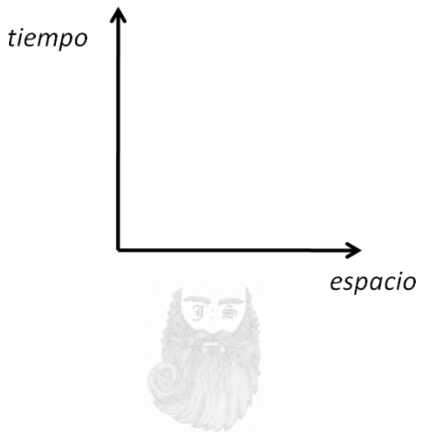
Sin embargo, ahora, en el mundo relativista, los eventos se producirán en una matriz espaciotemporal de cuatro dimensiones. Efectivamente, cuando introducimos el tiempo como una dimensión adicional a las 3 dimensiones espaciales que nos son tan intuitivas, la cosa se complica bastante para nuestra intuición.

(OBSERVACIÓN: ¿cómo se representa visualmente un espacio de 4 dimensiones? Bueno, yo, particularmente, no soy capaz de visualizarlo mentalmente, la verdad. Como mucho soy capaz de visualizarlo como una especie de teseracto, pero aun así lo sigo viendo como en 3 dimensiones, como un cubo dentro de otro cubo unido por las aristas; como un cubo que se pliega sobre sí mismo; como que implosiona… un churrete, vamos. De hecho, visualmente no creo que sea posible representarlo porque, sencillamente, nuestra visión, y nuestro cerebro, sólo es capaz de ver en 3 dimensiones. Otra cosa es que sepamos que hay más o que se cree un artificio para poder imaginarlo, como vamos a hacer en breve)

Para simplificar el asunto, pensemos en un espacio dimensional de una sola dimensión x. Las cosas sólo se podrían mover a lo largo del eje x.

Esto, de hecho, no es una simplificación tan "restrictiva" como cabría suponer en un principio pues cualquier movimiento rectilíneo en un espacio de 3 dimensiones se puede definir como un movimiento en una sola dimensión x si giramos convenientemente el sistema de referencia hasta hacer coincidir el eje x con la trayectoria del objeto que estamos estudiando.

Como hemos dicho, para representar un evento en el espacio(*unidimensional*)-tiempo usaremos un esquema como el siguiente (para pasar de este esquema simplificado a una situación tridimensional real que incluya las restantes dimensiones espaciales, *únicamente* deberíamos añadirlas, al menos, algebraicamente, porque visualmente, nos pongamos como nos pongamos, va a ser un jaleo de los buenos):



Este nuevo esquema, seguro, que nos suena bastante y nos parece bastante fácil de entender. En dicha representación gráfica podremos representar cualquier ***evento*** mediante la coordenada correspondiente proyectada sobre cada eje. Es importante el hecho de que estemos usando la palabra ***evento***, pues nos referimos a algo que está en algún lugar en algún momento determinado. Ya no es un punto: ahora es un suceso.

Pero, claro, nos encontramos con una primera dificultad: cada eje usa unidades diferentes. El eje del tiempo emplea, por ejemplo, segundos, mientras que el eje del espacio emplea, por ejemplo, metros. De momento, parece que no vamos a poder realizar operaciones consistentes en este sistema de coordenadas.

Pero a nada que pensemos, no ya en términos abstractos o relativistas, sino meramente con sentido común, vemos que la velocidad, en realidad, no es sino una relación entre *tiempo* y *espacio*.

Así, sabemos que:

$$velocidad = \frac{espacio}{tiempo} \rightarrow v = \frac{x}{t}$$

Y que, por lo tanto:

$$x = vt \qquad y \qquad t = \frac{x}{v}$$

Ahora, si usamos una expresión como la siguiente:

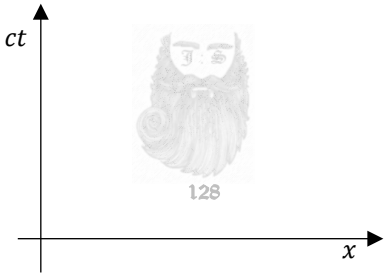
$$vt \rightarrow \frac{x}{\cancel{t}}\cancel{t} \rightarrow llegamos\ igualmente\ a\ una\ magnitud\ espacial: x$$

… Observamos que estaríamos midiendo el tiempo de una manera coherente con el espacio. Ya tendríamos los dos ejes, digamos, hablando el mismo *idioma*.

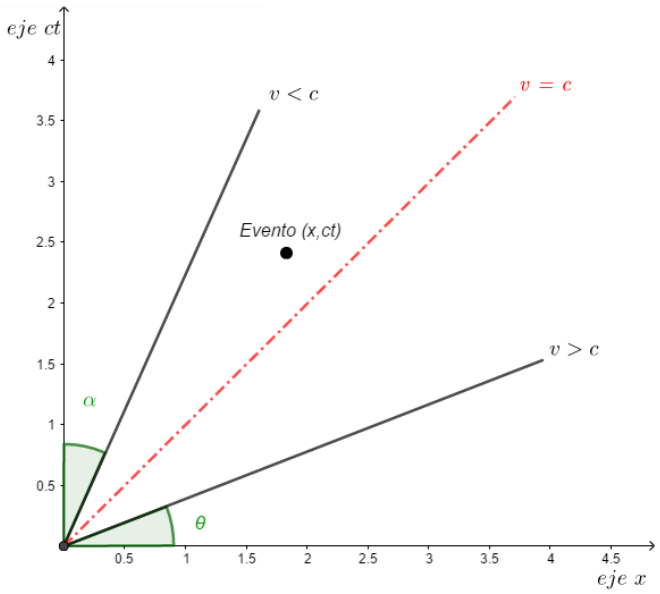
Pero, recordemos, vamos a hablar de Relatividad Especial. Vamos a hablar de un escenario en el que las velocidades, para que los efectos sean apreciables, van a ser altísimas, por lo que lo que vamos a hacer es multiplicar el tiempo por la velocidad, sí, pero la velocidad de la luz: *c*.

$$c = velocidad\ de\ la\ luz\ \left(299.792.458\ \frac{m}{s}\right)$$

Así, el Sistema de Referencias *primario* sobre el que trabajaremos será como el siguiente:



A partir de ahora, entonces, nos empezaremos a familiarizar con representaciones gráficas de eventos en *Sistemas de Referencia Inerciales* bajo la óptica de la física relativista. Se parecerán mucho a esto:



(OBSERVACIÓN: en el esquema anterior $\alpha = \theta$)

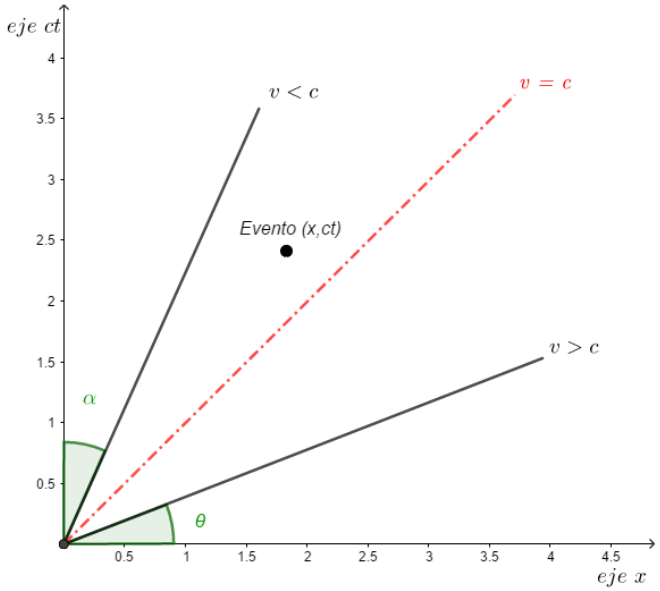
Como ya sabemos, ct es el tiempo multiplicado por la velocidad de la luz. Téngase en cuenta que con objetos que se mueven a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, la representación gráfica de cualquier movimiento, si el eje fuera simplemente t, nos arrojaría una línea prácticamente idéntica al eje x, casi solapada.

(OBSERVACIÓN: es obvio, pensémoslo por un momento: por ejemplo, en un segundo, ¿cuánto espacio recorre la luz? Brutal)

Para eso se usa un eje de tiempo "comprimido". Donde antes había un segundo, ahora, siendo ct, hay $299.792.458 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s}$. Hemos hecho una especie de zoom tremendo (alejando) sobre ese eje (sólo sobre ese eje), lo suficiente como para que la línea que antes teníamos solapada al eje x, empiece a alejarse de él.

Naturalmente, definiendo así los ejes de coordenadas, el movimiento de un fotón se reflejaría como una línea diagonal exacta (la roja), que hace 45 grados con el eje x y 45 grados con el eje ct.

Esto es bastante obvio. Si: 1 ct $(299.792.458 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s})$, es el tiempo que tardaría la luz en recorrer $299.792.458\, m$, en dicho tiempo, efectivamente, se recorrerá, exactamente, los mismos metros. En definitiva, se trazará una trayectoria en nuestro diagrama de 45º.



Todo evento tendrá lugar, si aceptamos que nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, "hacia la izquierda" de esa línea roja, es decir, con un ángulo mayor de 45º respecto del eje x (o menor de 45º respecto al eje ct).

Cualquier cuerpo que se mueva en esa zona se moverá con velocidad:

$$v = \frac{x}{t} \ (donde\ v < c)$$

La trayectoria de dicho objeto, como hemos dicho, tendrá un ángulo θ respecto al eje ct de manera que recordando que la tangente de un ángulo θ es:

$$\frac{\sin\theta \rightarrow \ proyección\ en\ el\ eje\ x}{\cos\theta \rightarrow \ proyección\ en\ el\ eje\ ct}$$

Es decir:

$$\tan\theta = \frac{x}{ct}$$

Que, sustituyendo, nos deja:

$$\tan\theta = \frac{x}{ct} \rightarrow \tan\theta = \frac{vt}{ct} \rightarrow \tan\theta = \frac{v}{c}$$

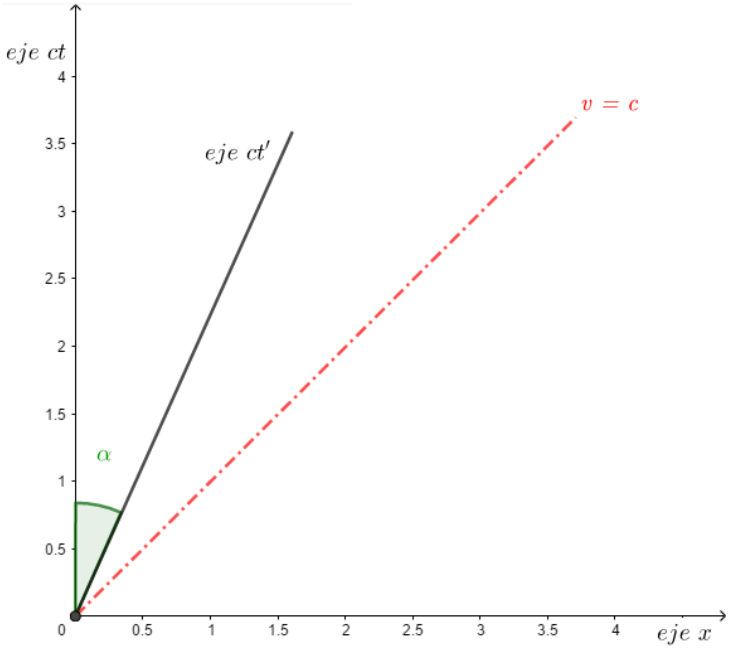
Así, un objeto que esté viajando a una velocidad baja respecto a la luz (cualquier movimiento de nuestra vida cotidiana) trazará una trayectoria muy cercana al eje ct, es decir, con un ángulo α muy bajo (recordemos que $\alpha = \theta$).

Añadamos ahora otro Sistema de Referencia Inercial, otro observador (S') que se mueve respecto del primero que hemos creado (S).

Para hacer las cosas más fáciles vamos a establecer que nuestros Sistemas de Referencia están en una configuración standard, es decir, que:

1. Los ejes de los sistemas de referencia son paralelos entre sí (no están rotados uno respecto a otro).

2. El origen de S' se mueve a lo largo del eje x de S con una velocidad v constante[67] medida desde S.
3. Los orígenes de S y S' coinciden en el momento $t = 0$.



Naturalmente, lo primero que observaremos es que la trayectoria del eje ct' de S' se dibujará como una línea recta 'a la derecha' de ct. Es decir, que el eje ct' aparecerá como si ct rotara en sentido horario (pues el vértice, el origen, es el mismo que ct) un cierto ángulo, que hemos llamado α (si S' se moviera a la velocidad de la luz, ese ángulo sería de 45º). Cualquier evento que se produzca en S', siendo $x' = 0$, generaría una serie de puntos que, unidos, conforman el eje ct'. El ángulo α ($\alpha = \theta$), ya lo hemos dicho, vendrá definido como $\tan\theta = \frac{v}{c}$.

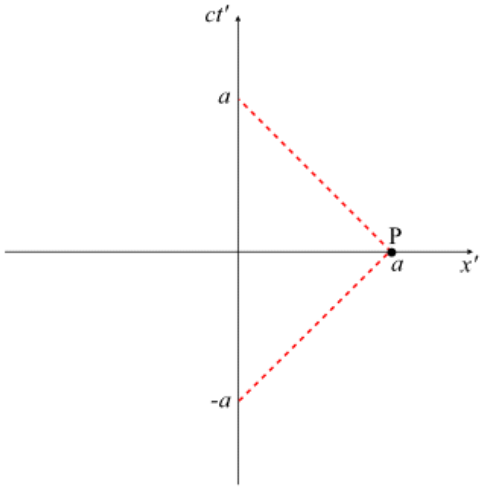
Ya tenemos el eje ct'. Vamos, ahora, con el eje x' del sistema S'.

De momento, sabemos que, como hemos dicho que estamos bajo una configuración estándar, el origen de ambos sistemas de referencia es el mismo y, por lo tanto, el eje x' debe pasar también por el mismo origen del sistema de referencia S.

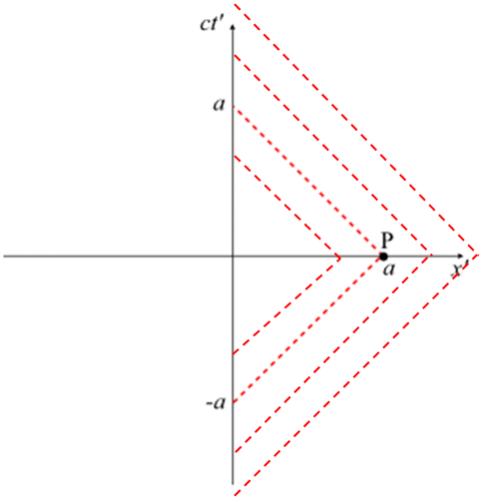
También conviene recordar el ***segundo postulado*** fundamental de la Teoría de la Relatividad Especial: la velocidad de la luz es constante para todos los observadores en sistemas de referencia inerciales. Esto tiene una implicación muy, muy importante (tanto a efectos ontológicos como a efectos geométricos): una entidad que viaje a la velocidad de la luz (un fotón, por ejemplo) debe formar un ángulo de 45º con ***ambos sistemas de referencia***. Esto, geométrica y visualmente, es imposible de dibujar pues, ya de entrada, si el eje ct' está rotado un cierto ángulo respecto a ct, ¿cómo vamos a dibujar algo que conserve 45º respecto a ambos ejes ya rotados? Veamos, cómo solucionamos esto.

[67] Si S' estuviera acelerado, no describiría una recta ct' sino una curva y además, recordemos, tampoco estaríamos en un sistema de referencia inercial y, por lo tanto, tampoco estaríamos hablando de Relatividad Especial.

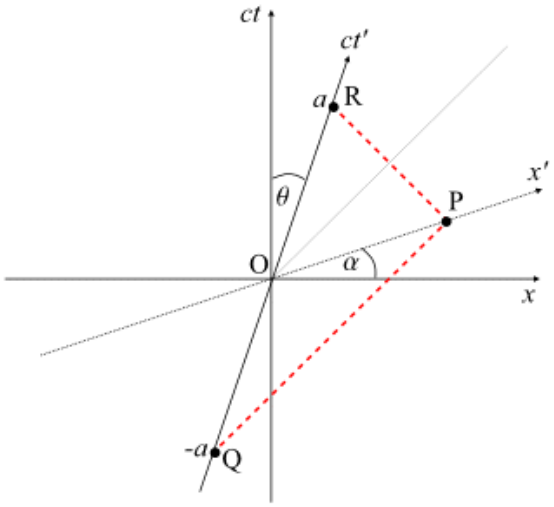
Para ello, situémonos inicialmente en el sistema de referencia S' (borremos de momento el resto de líneas). Sabemos que un rayo de luz debe formar un ángulo de 45º con el eje x' y el eje ct'. A continuación, imaginemos el siguiente proceso: en un momento determinado del pasado se emitió un rayo de luz hacia un espejo situado en un punto P que hemos puesto a una distancia a del origen en el eje x'. El rayo partió, temporalmente, desde un punto $-a$ en ct'; viajó en el espacio desde $x' = 0$ hasta $x' = a$, al cual llegará en el momento $ct' = 0$, es decir, en el presente; finalmente, rebota de nuevo hacia $x' = 0$, alcanzándolo en un momento futuro $ct' = a$. Visualmente se representaría como lo siguiente:



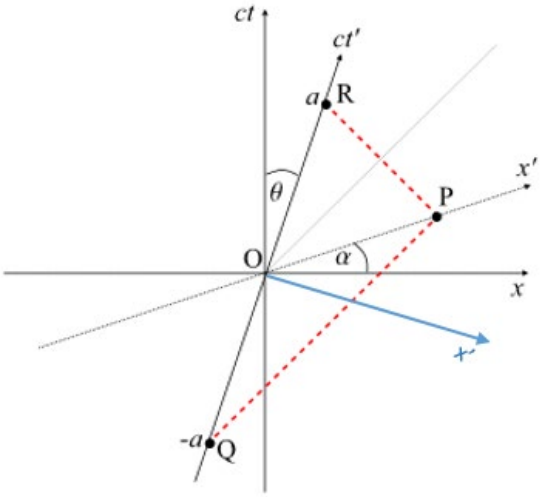
Puesto que hemos '*calibrado*' los ejes para que la luz *dibuje* trayectorias de 45º con los ejes del Sistema de Referencia, si cambiamos el momento pasado en que se emitió el fotón, es decir, la posición $ct' = -a$, moveríamos el punto P en que situamos el espejo y, efectivamente, la trayectoria de la representación gráfica del rebote conservará el ángulo de 45º con ambos ejes (dibujará un triángulo semejante, más grande o más pequeño). Justamente, esta propiedad es la que vamos a usar para poder definir todos los puntos que conforman el eje x'.



Volvamos ahora al sistema de representación gráfica en que tratábamos de representar los dos sistemas inerciales S y S' conjuntamente:



Aquí lo primero anti-intuitivo es, ¿por qué el eje x' queda por arriba del eje x? Si hemos girado el eje ct' en sentido horario, ¿no debería haberlo hecho también del mismo modo el eje x'? Es decir, uno esperaría más bien haber visto algo como esto (en azul la posición del eje x' que esperábamos):



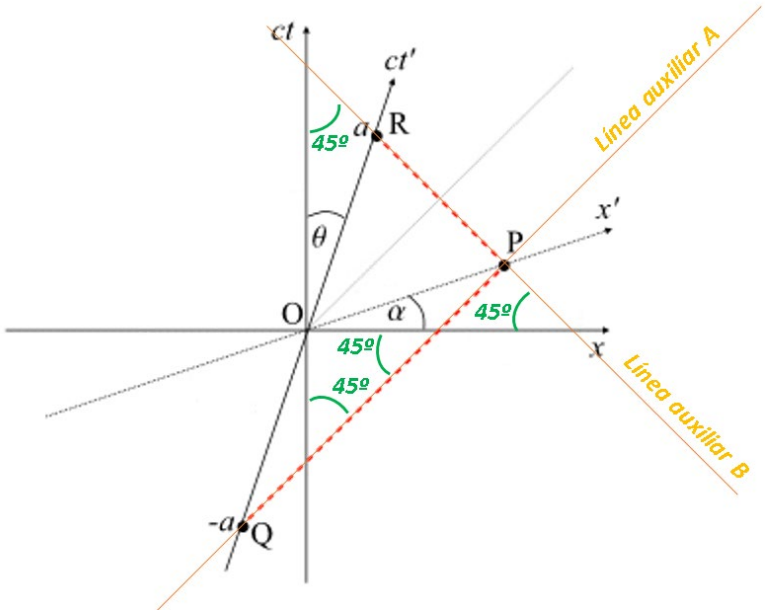
Vamos a explicar por qué no es ése el escenario que nos interesa. Esto, en un primer momento puede costar verlo, pero a nada que uno lo piense, se hace evidente. El asunto fundamental a considerar es que, digamos, ***hay un punto de referencia que "predomina" sobre el otro***[68]. Digamos que S es nuestro Sistema de Referencia, el sitio en que nosotros estamos (la primera persona del plural), y dibujamos el otro marco de referencia de manera que el nuestro permanece inmóvil, sin cambios, mientras que el que se presenta aparentemente rotado es otro, S'. El nuestro es, digamos, el "predominante" (no en vano estamos en él, "miramos" desde él). Los 45º de la gráfica deben conservarse, también, en S' pero, claro, mirados desde nuestro Sistema de Referencia (S). Digamos que es como si se desdibujaran desde nuestro punto de vista, algo así como que con esos ejes

[68] Éste es el artificio, absolutamente necesario, que vamos a usar para poder dibujar un imposible: un ángulo de 45º respecto a ambos sistemas rotados respectivamente, cosa que ya decíamos que es imposible hacer visualmente.

(los prima) se conservarán también los 45º pero nosotros lo vemos como en perspectiva, como ***hacia dentro del papel***.

Veámoslo *en directo*. Procedamos del siguiente modo:

- Tracemos el eje ct'
- Desde un punto Q ($ct' = -a$ y $x' = 0$) trazamos una línea que forme 45º con ***el eje x***[69] ***(aquí es donde decimos que "manda" el sistema S sobre el sistema S' en esta representación gráfica)***. Trazamos una ***línea auxiliar A*** hacia el infinito con la sola condición de que corte en 45º al eje x (también lo hará con el eje ct) del sistema S (pues la velocidad de la luz es constante para todos los puntos de referencia, también para el nuestro, claro está).
- Desde un punto R ($ct' = a$ y $x' = 0$) trazamos, igualmente, una ***línea auxiliar B*** infinita que corte al eje x (hará lo mismo con el eje ct) del sistema S con un ángulo de 45 º. Ambas líneas se cortarán mutuamente y generarán un punto P que, unido al origen, conformará el eje x' de S' respecto del eje x de S (el eje x', contendrá, naturalmente, todos los puntos P posibles del sistema S').



(OBSERVACIÓN: nótese que las ***líneas auxiliares A y B*** *(****verdaderas generadoras del nuevo punto P*** *para S') cortan en 45º a los ejes* x *y* ct *del* ***sistema S****, que hemos dicho* ***que predomina visualmente****)*

Lo que podría confundirnos es que esperásemos que, gráficamente, las líneas cortaran en 45 º todos los ejes de todos los marcos de referencia pero, naturalmente, eso es imposible de representar gráficamente, al menos, en un mundo plano como es un folio. Si se gira un poco uno de los sistemas, como hemos hecho, ya no hay posibilidad alguna de conservar el ángulo de 45º para los dos sistemas, al menos, como decimos, en la geometría plana de un papel. Por eso sería útil imaginar algo así como que el sistema S' "*se mete hacia dentro del*

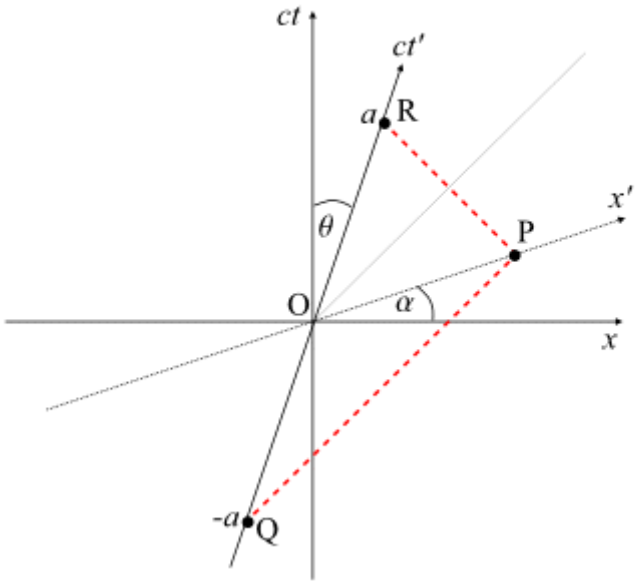
[69] A causa de la invarianza de la velocidad de la luz, forzosamente existe la necesidad de que la representación gráfica de la trayectoria del fotón conserve un ángulo de 45º con los ejes x y ct del sistema de referencia S.

folio", como si estuviéramos en un espacio con un punto de fuga cónico o algo así, como si cortara 45º pero en una dimensión z *"hacia dentro"*.

El caso es que en el folio bidimensional en que hacemos esta representación gráfica, el marco que "*manda*" es el S (no en vano, nos situamos en él). Si lo invirtiéramos, es decir si hiciéramos que el S' fuera el predominante, se vería diferente (en breves líneas lo veremos).

Lo que debe quedar claro es cómo se construye el eje x', usando como patrón de referencia la necesidad del corte en 45º de los rayos de luz sobre el eje x del marco predominante S.

Por otro lado, realmente, no es necesario construir el eje x' por "deslizamiento" de los puntos $-a$ y a en ct' ya que, como sabemos que el origen de ambos sistemas de referencia son el mismo[70], con un único punto P de x', unido al origen (O), tenemos la definición completa del eje.



Ahora nos encontramos con un triángulo isósceles ORP (insistimos: ORP, no QRP; dos de sus ángulos y lados son iguales). Si hacemos una bisectriz a dicho triángulo desde el origen O, debe darnos una línea (habiendo conservado bien todos los ángulos), que haga 45º con el eje x del marco S (en realidad esa bisectriz, justamente, es la que traza un fotón). La bisectriz de ese triángulo, lo que nos establece, si mide 45 º, es que el triángulo ORP está bien "*centrado*" en el marco de referencia S y, por lo tanto, en el esquema anterior en que $\alpha = \theta$.

Antes del siguiente paso recordemos que en un eje de coordenadas, una línea comprendida entre dos ejes se define, efectivamente, en función de dichos ejes. Por ejemplo la ecuación de la diagonal entre dos ejes, en un sistema de coordenadas cartesiano de dos dimensiones xy, la definiríamos como $y = x$. Del mismo modo, podríamos definir la ecuación que caracteriza a la línea que hace 45º con los ejes ct y x como:

$$ct = x$$

[70] Configuración estándar.

Sin embargo, sabemos que x' debe hacer un ángulo menor de 45º con el eje x, por lo que la ecuación de la línea que define al eje x' será:

$$ct = (\tan \alpha)x$$

Obviamente, cuando el seno y el coseno son iguales, efectivamente, el ángulo del que estaríamos hablando sería de 45º. Al ser iguales, la tangente ($\frac{sin}{cos}$), sería igual a 1 y, por lo tanto, como es de imaginar, x' estaría definido como:

$$ct = 1 \cdot x \rightarrow ct = x$$

Sin embargo, ya sabemos que el ángulo α no es de 45º, sino que es menor (respecto a x), es decir, que el seno es menor que el coseno, o lo que es lo mismo: la tangente (sin/cos) es menor que 1. Así, el punto que, en este caso, definimos mediante esta ecuación '*estará más bajo*' que antes; por debajo de la línea de los 45º. Es decir, si antes, para un x teníamos un punto exactamente igual en la dimensión ct (la 'altura', la 'distancia que se elevaba hacia arriba' sobre x), ahora dicha altura será menor, como es más que obvio observando la fórmula y el diagrama.

Por otro lado, puesto que sabemos que 'el triángulo ORP está centrado' y $\alpha = \theta$, y puesto que (ya lo vimos antes) conocemos θ, podremos reescribir la ecuación que define $\boldsymbol{x' : ct = (\tan \alpha)x}$ como:

$$\boldsymbol{x'} \ [71] \rightarrow \ \boldsymbol{ct = tan\, \alpha \cdot x \rightarrow \left(\frac{v}{c}\right) x}$$

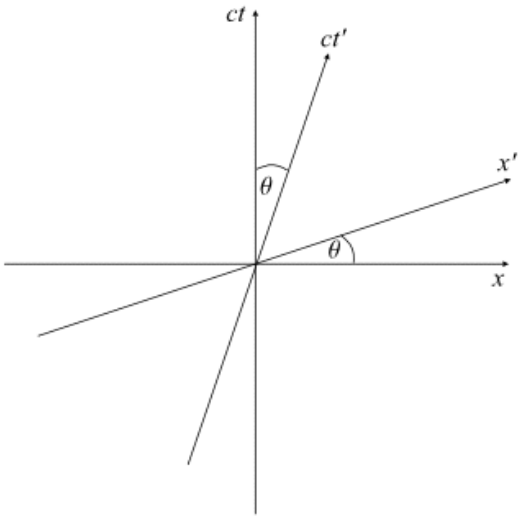
Usando el mismo procedimiento, podríamos definir el ***eje ct'*** como:

$$\boldsymbol{ct' \rightarrow \ ct = \frac{x}{\tan \alpha} \rightarrow \left(\frac{c}{v}\right) x}$$

(OBSERVACIÓN: téngase en cuenta que aquí pasa justo lo contrario que pasaba con el eje x'. Aquí el ángulo α debe ser mayor que 1 para que la línea trazada (el eje ct') esté por encima de la línea de 45º. El modo de conseguir esto es invirtiendo la función tangente. Donde antes teníamos sen/cos < 1, ahora tendríamos un cos/sen >1 y, por lo tanto, por encima de la línea de 45 º, justamente, '*tan por encima de la línea de los 45º como por debajo de los 45º está la otra*').

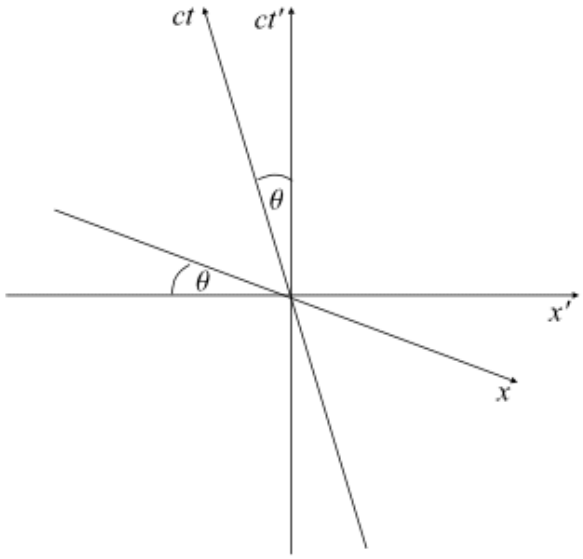
Así, finalmente, nos queda este modelo (observado, ya lo hemos dicho, desde el Sistema de Referencia *S*, haciéndolo, digamos, prevalecer como la referencia desde la que miramos):

[71] Es obvio que x' (y ct') debe estar en función de ct y x pues, no en vano, no dejan de ser rectas contenidas en el plano ct, x.

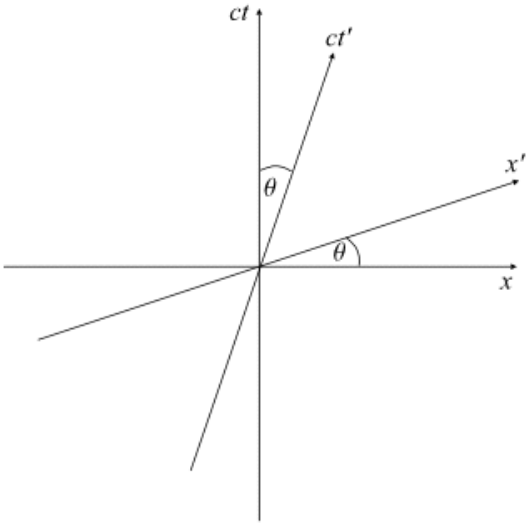


Donde S' se mueve hacia la derecha respecto del marco S.

Por otro lado, si en cambio usáramos como referencia privilegiada el Sistema S', veríamos al Sistema S moverse hacia la izquierda y, mediante la construcción geométrica que hemos referenciado hasta aquí, obtendríamos algo como el siguiente esquema (algo en lo que digamos que S parece como "salir del papel hacia nosotros"):



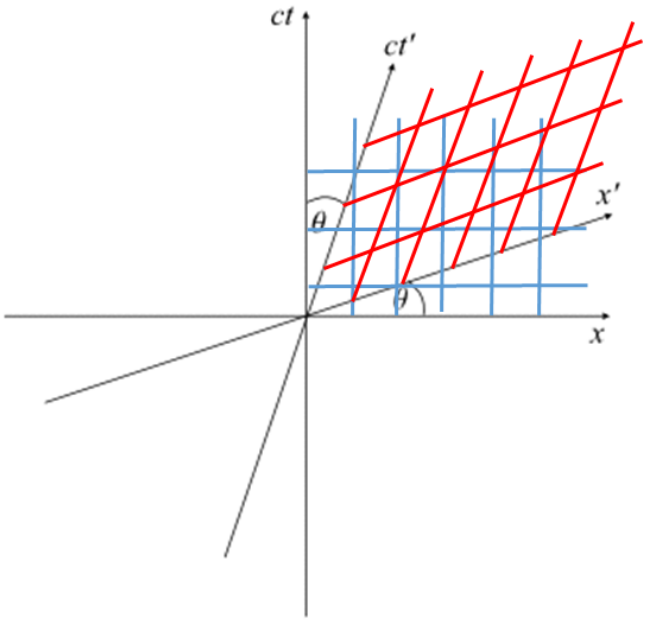
Prosigamos, ahora, con el caso estándar en el que predomina el nuestro Sistema de Referencia S.



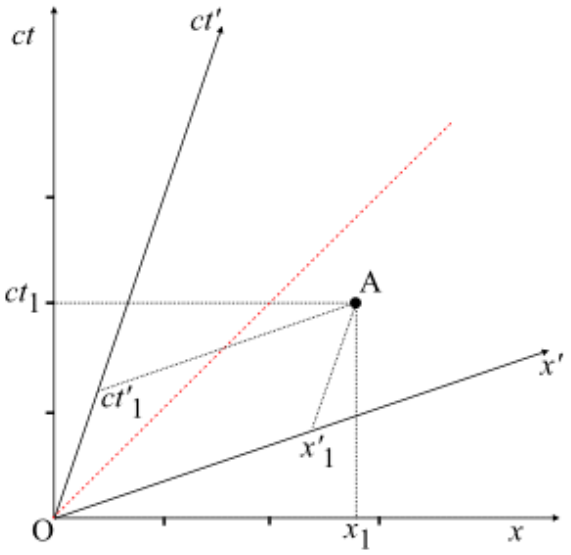
Tenemos dos Sistemas de Referencia coexistiendo. ¿Cómo establecemos las coordenadas?

Muy fácil, cada uno de ellos tiene su propio Sistema de coordenadas respetando un patrón de líneas paralelas a sus ejes respectivos. Incluso podremos hacer transformaciones entre Sistemas. Ya lo veremos después.

Así, marcamos en azul las líneas de referencia que usaríamos para obtener coordenadas del Sistema *S* y en rojo las líneas de referencia que usaríamos para obtener coordenadas del Sistema *S'*.

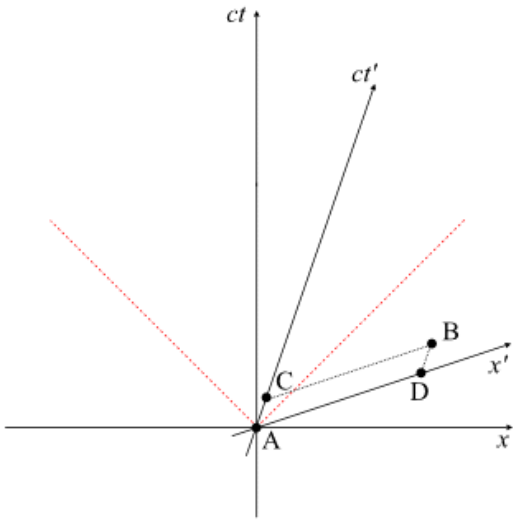


Así, por ejemplo, podríamos establecer las coordenadas de un evento A cualquiera mediante el siguiente procedimiento:



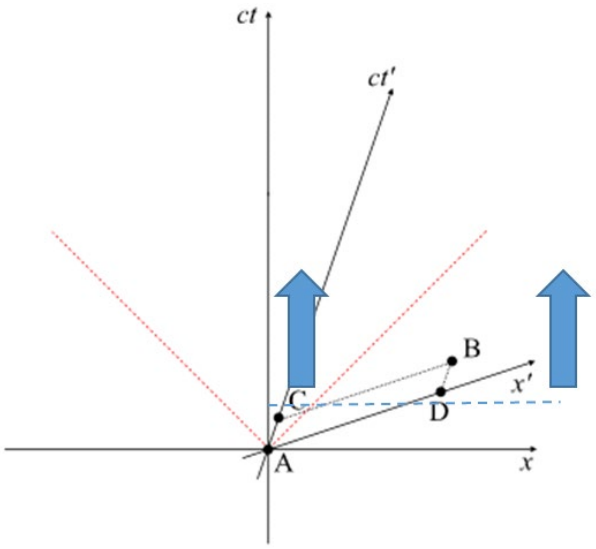
Sobra decir que el eje x' no coincide con el eje x. Esto sólo pasaba en el mundo clásico donde espacio y tiempo son conceptos absolutos, ajenos a su contenido, y cuyas variaciones respecto de los puntos de vista de diferentes observadores se calcularían mediante las transformaciones galileanos. La constancia de la velocidad de la luz, ya lo sabemos, rompe este modelo clásico de espacio y tiempo absolutos e independientes de sus contenidos. Entramos en el terreno de la física relativista y las transformaciones que usaremos para interrelacionar los diferentes marcos de referencia serán las Transformaciones de Lorentz.

Desde esta nueva óptica la simultaneidad (*y la causalidad, si se considera que la causalidad implica que un fenómeno para ser causa de otro debe precederlo en el tiempo (cosa que yo no acepto)*) sufren unos cambios más que llamativos. Obsérvese el siguiente esquema:



Ahora recórrase el tiempo en cada Sistema de Referencia:

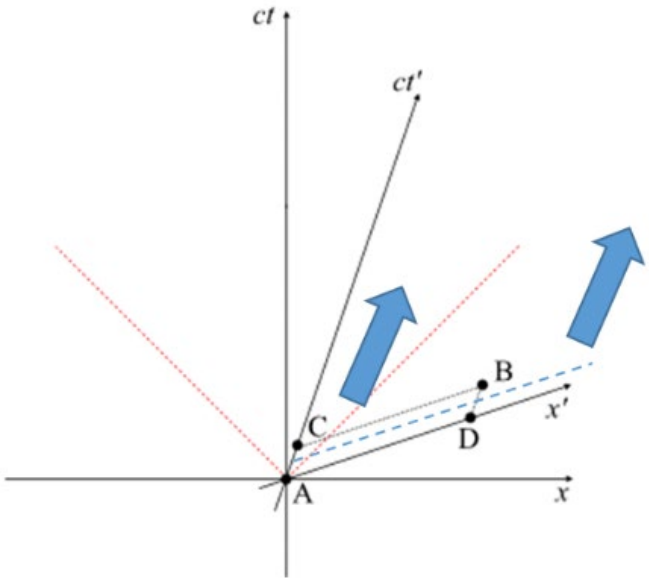
Sistema S:



Observaremos que la secuencia temporal en que se dan los fenómenos para el observador S sería:

1. A
2. C
3. D
4. B

En cambio en el marco S':

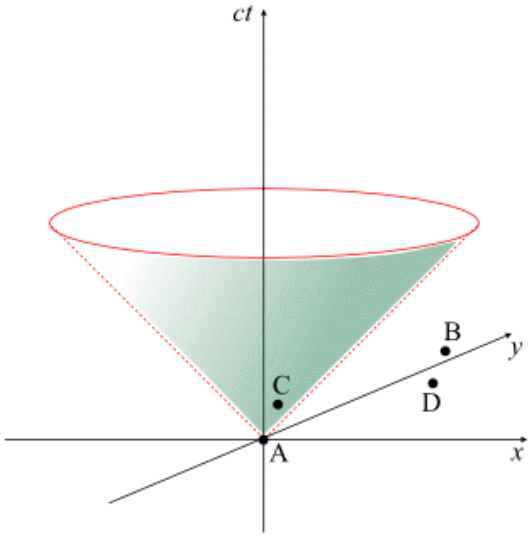


Veremos que A y D son simultáneos y que poco después C y B son simultáneos también:

1. A,B
2. C,B

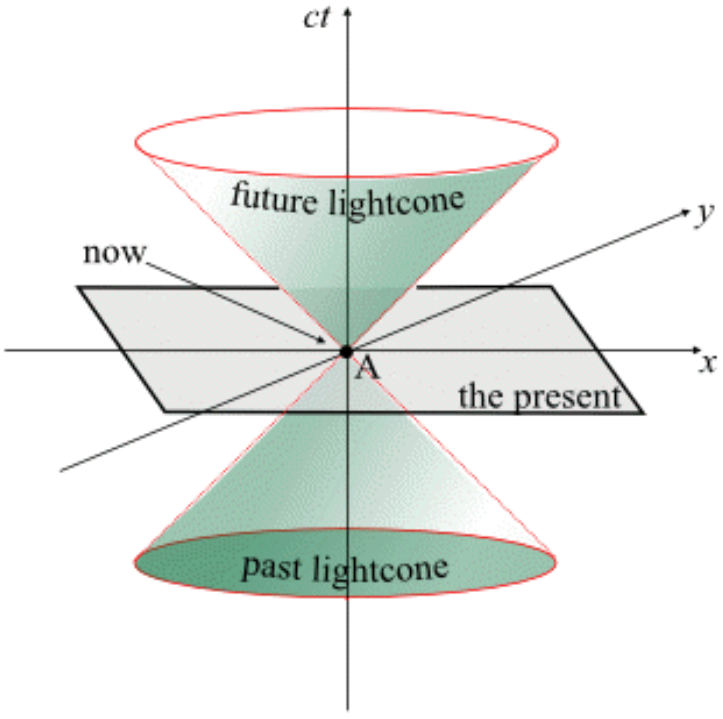
Es decir, el concepto de simultaneidad, de tiempo, queda definitivamente trastocado.

Por otro lado, la ***Causalidad*** en Relatividad, está limitada por la velocidad de la luz. Todo lo que quede fuera del "cono" que marca la velocidad de la luz, no puede ser causa de nada que suceda dentro del cono de luz de "interacciones posibles" (¡ya veremos el entrelazamiento cuántico! ¡Genial! Ya lo veremos, y también estudiaremos sus implicaciones ¡'*ontológico-spinozianas*'!).



Según este esquema, B y/o D no pueden ser causa de A y/o C. La relación de causalidad entre A y C es posible, se podría estudiar, pero B y C no pueden comunicarse más rápido que la velocidad de la luz con A y/o C y, por tanto, no podrían ser causa posible.

Presentamos a continuación el "*Esquema General de la Causalidad Relativista*":



Ya tenemos los ejes en los que representar los eventos para dos observadores bajo un escenario sujeto a los principios de la Relatividad Especial. Nos faltaría, para completar el modelo de representación, 'calibrar' los ejes de cada observador, es decir, identificar la proporción en que se relacionan las magnitudes en los ejes de cada observador.

Ya sabemos, además, que la magnitud del intervalo entre dos sucesos, según el punto de vista de ambos observadores, debe quedar invariante en razón de la expresión:

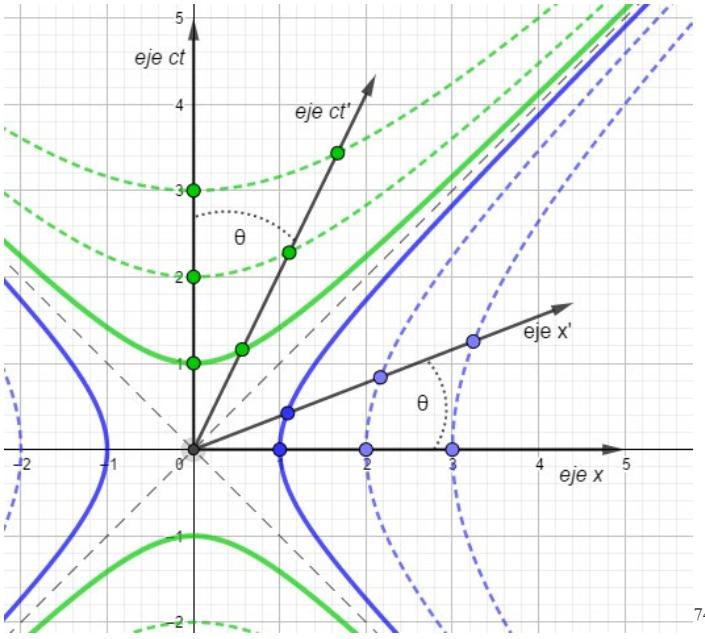
$$(\Delta S)^2 = \left(x^{0'}\right)^2 - \left(x^{1'}\right)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

Es decir, siguiendo una 'distribución' hiperbólica[72].

De esta manera la invarianza del intervalo nos va a permitir calibrar las referencias en los diferentes ejes pues, no olvidemos, las distancias entre las *marcas* de referencia de los ejes de cada observador no miden lo mismo.

Para ver, entonces, la correspondencia entre los ejes, bastará con hacer lo siguiente:

- *Para el eje* ct' [73]:
  ver en qué punto corta la parábola $(ct)^2 - x^2 = -1$ *al eje ct'*
- *Para el eje* x'*:*
  ver en qué punto corta la parábola $(ct)^2 - x^2 = 1$ *al eje x'*



[74]

[72] Recuérdese que (nota 44) la expresión canónica de la hipérbola '*unidad*' es, efectivamente: $x^2 - y^2 = 1$.

[73] El eje ct' se define por la siguiente ecuación: $ct = \frac{x}{\tan \alpha}$ (el eje ct ' es una línea contenida en el plano <ct, x>). Donde, considerando $c = 1$ y sabiendo que $\tan \alpha = \frac{v}{c}$, podemos definir el **eje** ct' como: $ct = \frac{x}{v}$.
Por otro lado, de manera análoga, el **eje** x' se define como: $ct = tan\,\alpha \cdot x \rightarrow ct = v \cdot x$

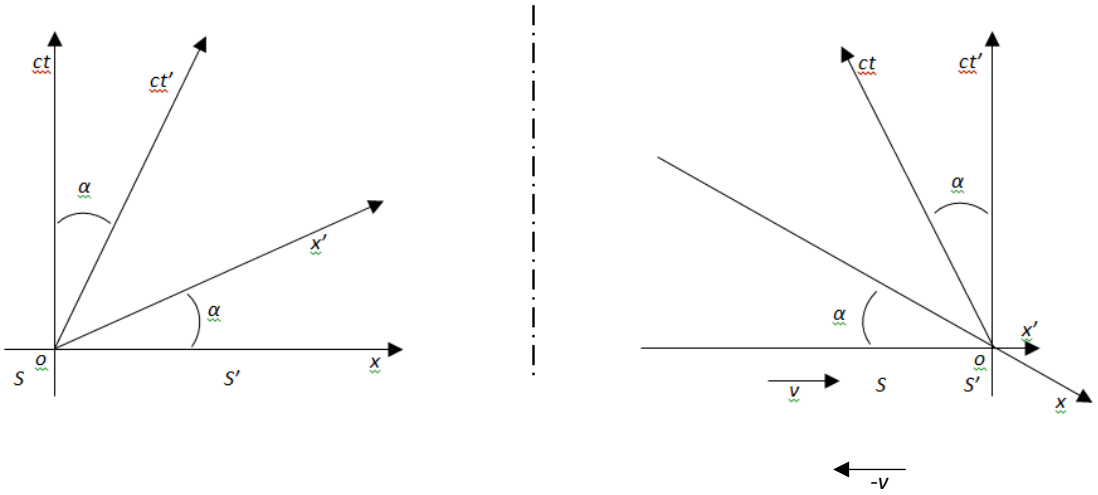
[74] Las parábolas con línea discontinua serían las parábolas sucesivas que permitirían encontrar los siguientes puntos de intersección con los ejes ct' y x'.

-1.8-

Las Transformaciones de Lorentz

Para empezar, y ahora que conocemos cómo representar gráficamente las consecuencias de la invarianza la velocidad de la luz respecto a cualquier Sistema de Referencia Inercial, vamos a realizar algunos simples desarrollos algebraicos para deducir la formulación de las *Transformaciones de Lorentz*.

Empecemos por representar gráficamente dos Sistemas inerciales simétricos, es decir, cómo *S* y *S'* se ven respectivamente.



En este caso tenemos un observador *S* situado en el marco "preferente" y un observador *S'* que se desplaza, inercialmente, con una velocidad constante *v, 'hacia la derecha',* sobre el eje *x*.

En este caso nos centramos en *S'* que, según su punto de vista, observa como *S* se desplaza sobre el eje *x, 'hacia la izquierda',* con una velocidad *–v*.

(OBSERVACIÓN: x y x' deben ser coherentes y crecer hacia la derecha y el tiempo ct y ct' debe crecer hacia arriba en ambos sistemas. Digamos que para que se entiendan entre ellos, tienen que ponerse de acuerdo en cómo medir…)

Abordemos, en primer lugar, los fenómenos del movimiento usando las ***transformaciones galileanas***.

Para ello, ubiquémonos mentalmente en un entorno "clásico-newtoniano-galileano" en el que el espacio y el tiempo son magnitudes absolutas que permanecen ajenas, impávidas, a lo que sucede dentro de ellas y, a continuación, comencemos por ver cómo se estudiaría el movimiento de una partícula A desde cada uno de los Sistemas de Referencia , S y S', respectivamente.

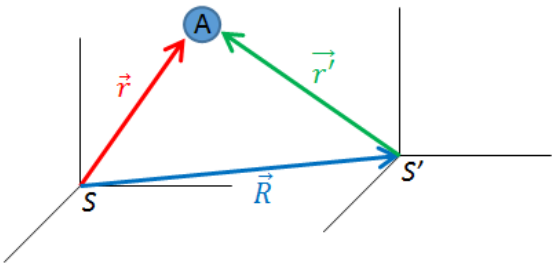
Téngase en cuenta que S va a usar los datos que tiene de S' para definir sus mediciones y, por otro lado, otra consideración ***muy importante***: S no está midiendo exclusivamente el movimiento de S', sino que está midiendo, a través de S', un punto A que ven ambos sistemas de referencia pero que se presenta de manera diferente a cada uno de ellos.

Vectorialmente sería algo así:

- El observador S define un vector $\vec{r}$ hasta un punto A.
- El observador S' define un vector $\vec{r'}$ hasta el mismo punto A.

*(OBSERVACIÓN: consideremos que en el siguiente esquema las velocidades hacia la derecha son velocidades '**positivas**' y hacia la izquierda son velocidades '**negativas**')*

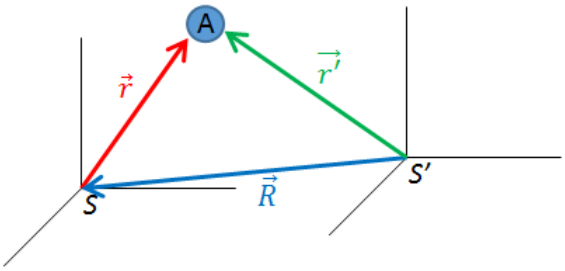
Así, ***desde S*** tendremos que:



Donde (véase nota 33) el vector $\vec{r}$ es la suma (cabeza de $\vec{R}$ con cola de $\vec{r'}$) de los vectores $\vec{R}$ y $\vec{r'}$.
Por otro lado, como $\vec{R} = vt$ (el espacio que ha recorrido S' alejándose de S es su velocidad de desplazamiento por el tiempo que ha estado moviéndose), la expresión $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R}$, queda, definitivamente, como:

$$\vec{r} = \vec{r'} + vt$$

Por otro lado, ***desde S'*** tendremos que:



(OBSERVACIÓN: nótese el cambio de dirección del vector $\vec{R}$)

Ahora $\overrightarrow{r'}$ es la suma (cabeza de $\vec{R}$ con cola de $\vec{r}$) de los vectores $\vec{R}$ y $\vec{r}$, pero, importante, en este caso, como $\vec{R}$ va hacia la izquierda, resulta que la velocidad tiene sentido negativo, es decir: ($\vec{R} = -vt$), por lo que resulta que: $\overrightarrow{r'} = \vec{r} + \vec{R}$

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} - vt$$

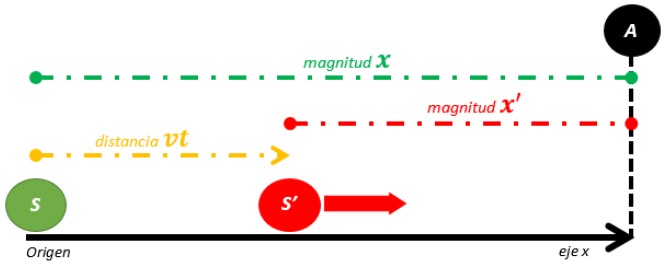
Hasta aquí simple Newton y Galileo, lo intuitivo[75].

Pero ahora, para ir acercando la cuestión al terreno que nos interesa, introduzcamos una hipótesis: que las mediciones no son iguales para diferentes observadores, es decir, el espacio y el tiempo no son entidades constantes y pasivas externas al evento, sino que éstas, espacio y tiempo, se transforman de alguna manera, se deforman. Para ello introduciremos un ***factor gamma de Lorentz***, una especie de corrector, un "*número que multiplica la transformación galileana para hacer que se produzca una modificación, una corrección de la medición, por pequeña que sea con el fin de hacer coincidir las magnitudes*".

---

[75] Fijémonos en el siguiente esquema:

(OBSERVACIÓN: imaginemos para el esquema que en el origen del tiempo ($t = 0$) ambos están en el mismo punto)



a) Abordemos en primer lugar el asunto desde el punto de vista de S.

Imaginemos que S, en $t = 0$, está en reposo en el origen y que S' se mueve con una velocidad v hacia la derecha.

¿Cómo definirá S, en un tiempo posterior $t > 0$, la *magnitud* $\boldsymbol{x}$ hasta el punto A?[75]

Muy simple: S observará que S' se aleja hacia la derecha de manera que considerará que magnitud es $\boldsymbol{x'}$ ***más*** el espacio que S' está recorriendo (o mejor, ya ha recorrido) hacia el punto A sobre el eje x que, recordemos, también comparten. Es decir, dirá que:

$$\boldsymbol{x = x' + vt}$$

b) Abordemos ahora el asunto desde el punto de vista de S'.

A tenor del esquema propuesto es fácil ver que S', en el mismo momento $t > 0$ en que S hizo su medición, definirá la *magnitud* $\boldsymbol{x'}$ hasta el punto A como *magnitud* $\boldsymbol{x}$ ***menos*** la *distancia* $\boldsymbol{vt}$ que ya lleva recorrida**:**

Así tendríamos que:

$$\boldsymbol{x' = x - vt}$$

Así, para estudiar la transformación que se produce en las magnitudes x y x' respectivamente, plantearemos lo siguiente:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

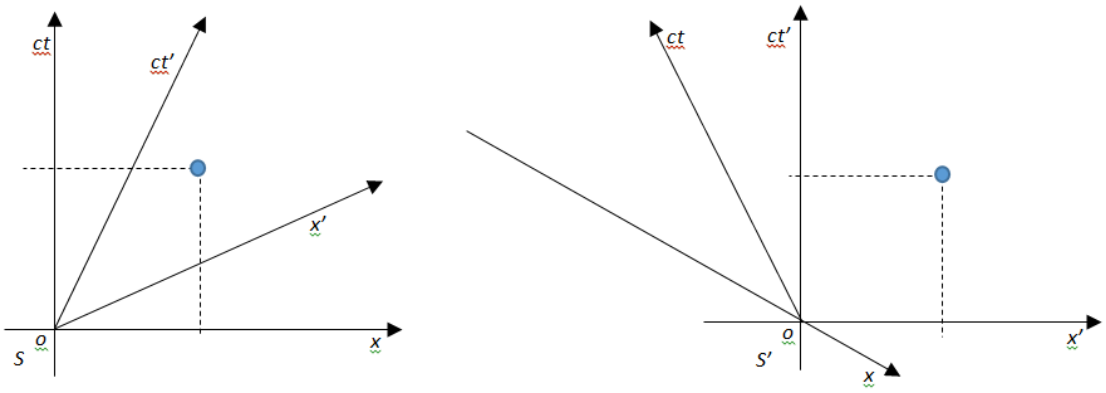
$$x = \gamma(x' + vt')$$

Claro, la pregunta es ¿qué demonios es ese factor γ que nos hemos sacado de la manga? Y peor aún, ¿cómo lo calculamos?

Vamos a partir de la aplicación de la definición de producto escalar que hemos analizado en la sección sobre la métrica a x y x' y observemos qué sucede.

$$x \cdot x' = \gamma^2(xx' + xvt' - x'vt - v^2tt')$$

Ahora, basándonos en el segundo postulado de la Relatividad Especial según el cual la velocidad de la luz es constante ($c = cte$) podemos analizar el comportamiento, de un fotón tal y como se observaría en ambos Sistemas de Referencia.



Puesto que el fotón se mueve a la velocidad de la luz, y el eje vertical es ct, podremos asegurar que formará un ***ángulo de 45º con ambos ejes x, ct (en S) y x', ct' (en S')***. Por ello podremos decir para uno y otro caso que:

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

Por otro lado, para que el sistema sea coherente e invariante en ambos Sistemas, el factor de Lorentz debe ser igual en ambos casos, así, ahora, sustituimos en lo que teníamos:

$$x \cdot x' = \gamma^2(xx' + xvt' - x'vt - v^2tt')$$

$$ctct' = \gamma^2(ctct' + ctvt' - ct'vt - v^2tt')$$

Que podemos replantear como:

$$c^2tt' = \gamma^2(c^2tt' \cancel{+ ctvt' - ct'vt} - v^2tt')$$

Es decir:

$$c^2tt' = \gamma^2(c^2tt' - v^2tt')$$

Observemos que tt' está como factor común en todos los elementos de la expresión, por lo que podremos factorizarlo y decir que:

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

De donde despejamos Gamma como:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

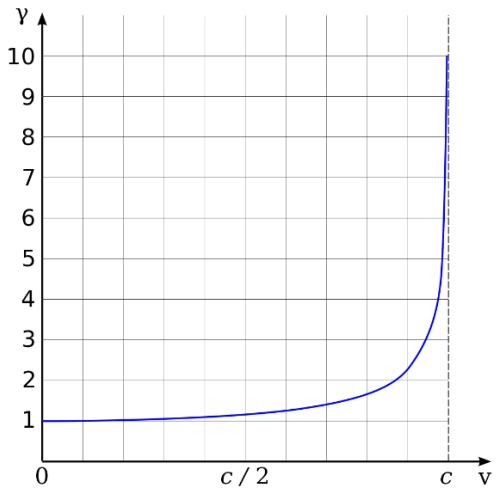
Y ya tenemos el ***factor de Lorentz*** que, como vemos, está exclusivamente en función de la velocidad del cuerpo (pues la velocidad de la luz es una constante). Sin embargo, para simplificar aún más la expresión, dividimos tanto arriba como abajo por c^2. Obtenemos que:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

De donde, definitivamente obtendremos, en función del parámetro único v (importantísimo, recordemos que c es constante), el ***factor de Lorentz***:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Cuya comportamiento, según cambie v, tiene la siguiente representación gráfica es:



(OBSERVACIÓN: nótese que si $v = c$, la expresión nos daría una indeterminación y, por otro lado, mientras que la velocidad se acerca a la velocidad de la luz, $v^2 \to c^2$, Gamma tiende a infinito, es decir, acabamos de ver por qué es imposible superar la velocidad de la luz).

Recordemos cuáles eran nuestras hipótesis y resolvamos la primera de nuestras dudas.

La transformación espacial de x', conociendo ya el factor de Lorentz, será:

$$\boldsymbol{x' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)(x - vt)}$$

Analicemos ahora la transformación que se produce en la variable temporal t'.

Tenemos, ahora, estas tres expresiones:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tratemos de expresar t' en función de x y t (los datos del Sistema de Referencia 'principal').

Empecemos, pues, a desarrollar las expresiones algebraicamente. Vamos a despejar t':

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\frac{x}{\gamma} = x' + vt'$$

$$\frac{x}{\gamma} - x' = vt'$$

$$\frac{x}{\gamma v} - \frac{x'}{v} = t'$$

Usemos ahora la expresión $x' = \gamma(x - vt)$ para seguir sustituyendo en x'. Obtendremos:

$$\frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma(x - vt)}{v} = t'$$

Multipliquemos arriba y abajo, en todos los miembros del lado izquierdo por $\frac{\gamma}{\gamma}$ (obviamente, es como multiplicar por uno) y, después, factoricemos:

$$\frac{\gamma x}{\gamma\gamma v} - \frac{\gamma\gamma(x - vt)}{\gamma v} \rightarrow \frac{\gamma x}{\gamma\gamma v} - \frac{\gamma\cancel{\gamma}(x - vt)}{\cancel{\gamma}v} \rightarrow \frac{\gamma x}{\gamma^2 v} - \frac{\gamma(x - vt)}{v}$$

$$\gamma\left(\frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} + \frac{vt}{v}\right) = t'$$

$$\gamma\left(\frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} + t\right) = t'$$

Empezamos a acercarnos a algo que modifica el tiempo del sistema S para llevarnos al tiempo (t') del sistema S'.

Analicemos lo que hemos marcado en rojo, a ver si podemos presentarlo de manera más clara. Trabajemos exclusivamente sobre él:

$$\frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} \rightarrow x\left(\frac{1}{\gamma^2 v} - \frac{1}{v}\right)$$

Hagamos denominador común en el racional derecho:

$$x\left(\frac{1}{\gamma^2 v} - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 v}\right) \rightarrow x\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 v}\right)$$

Ahora usemos el Factor de Lorentz, que ya conocemos, para sustituir:

$$Si\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, entonces \rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ahora, si multiplicamos arriba y abajo por c^2, obtenemos:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

Y sustituyamos ahora en lo que estábamos analizando particularmente (y que pusimos en rojo) $\frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} \rightarrow x\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 v}\right)$:

$$x\left(\frac{1-\frac{c^2}{c^2-v^2}}{\frac{c^2}{c^2-v^2}\cdot v}\right)$$

Y ahora otro truquillo perfectamente válido y que sigue arrimando *el ascua a nuestra sardina*: definir 1 como:

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2}$$

Así que entonces podemos tener:

$$x\left(\frac{\frac{c^2-v^2}{c^2-v^2} - \frac{c^2}{c^2-v^2}}{\frac{c^2 v}{c^2-v^2}}\right)$$

Desarrollemos esto un poco:

$$x\left(\frac{\frac{-v^2}{c^2-v^2}}{\frac{c^2 v}{c^2-v^2}}\right)$$

Es decir:

$$x\left(\frac{-v^2(c^2-v^2)}{c^2v(c^2-v^2)}\right)$$

Que es:

$$x\left(\frac{-v^2}{c^2v}\right)$$

Es decir:

$$x\left(\frac{-v}{c^2}\right)$$

Ya hemos comprimido y transformado la parte roja de la expresión que estábamos analizando.

Sustituyamos ahora:

$$t' = \gamma\left(\frac{x}{\gamma^2 v} - \frac{x}{v} + t\right) \rightarrow t' = \gamma\left(x\left(\frac{-v}{c^2}\right) + t\right)$$

Es decir:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Y ya tenemos la transformación del tiempo t' en función de t y x (recordemos que la v que hay no es sino: $\frac{x}{t}$).

Ojo a esto: tenemos entonces dos transformaciones: la espacial y la temporal y sus inversas.

Las transformaciones para x' y t' (recordemos, nos movemos sólo en el eje x), son:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{\left(-\frac{v}{c^2}\right)x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y, a nada que lo miremos, vamos a ver que concuerda perfectamente con lo que ya teníamos antes: la Transformación Galileana por el factor de Lorentz (para el caso de x'):

$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow x' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \cdot (x - vt) \rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y, naturalmente, despejando tenemos su inversa para x y t:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y, entonces, Minkoswki, partiendo de las Transformaciones de Lorentz, *propuso* que si se calculaban las diferencias de posiciones-tiempo de dos eventos A y B y se elevaban al

cuadrado en el caso de cada observador y, también, se le cambiaba el signo a la componente temporal Δt de cada evento, es decir, se hacía negativo[76], las ecuaciones resultantes para cada observador arrojaban el mismo resultado, es decir, se obtenía un resultado invariante:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

$$(\Delta S)^2 \equiv (\Delta S')^2$$

Antes de seguir, ***probemos, ahora, si esto que proponía Minkowski era cierto***.

Supongamos ahora que se nos dan dos sistemas inerciales S y S' y sean las coordenadas de un suceso A cualquiera (x, y, z, t) y (x', y', z', t') respectivamente para cada uno de ellos. Mediante las transformaciones para x' y t' (o a la inversa si medimos desde el otro lado, S') podremos demostrar, mediante un sencillo cálculo, un postulado fundamental de la Teoría de la Relatividad según el cual se cumple la igualdad:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Vamos a demostrarlo:

Proposición. Dado un evento p, con coordenadas (x, y, z, t) para cierto sistema de referencia S el valor

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

es independiente del sistema considerado.

Demostración.

Consideremos un sistema S' que se mueve a velocidad v constante respecto a S, por el eje x solamente. Entonces, usando las transformaciones que conocemos:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y \ (sólo\ se\ mueve\ en\ x)$$

$$z' = z \ (sólo\ se\ mueve\ en\ x)$$

Y siendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y llamando a $\frac{v}{c} = \beta$.

Podremos reescribir como:

(multiplicamos t' por c para obtener ct', que es lo que hay en nuestra Proposición)

$$ct' = c\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \rightarrow \gamma\left(ct - \frac{cvx}{c^2}\right) \rightarrow \gamma\left(ct - \frac{vx}{c}\right) \rightarrow \boldsymbol{\gamma(ct - \beta x)}$$

Con x' hacemos algo parecido:

[76] Recordemos las Funciones Trigonométricas Hipérbolas, la métrica de Minkowski, …

(multiplicamos y dividimos por c, es decir 1, en el sumando $-vt$)

$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow \gamma\left(x - \frac{c}{c}vt\right) \rightarrow \gamma\left(x - \frac{vct}{c}\right) \rightarrow \boldsymbol{\gamma(x - \beta ct)}$$

Y, bueno, obviamente ya hemos dicho que y y z no se transforman:

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Entonces, según nuestra Proposición, debe cumplirse que

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2$$

Reordenando:

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

Así, usando las transformadas podremos decir que $x'^2 - (ct')^2$ es igual a:

$$x'^2 - (ct')^2 = \big(\gamma(x - \beta ct)\big)^2 - \big(\gamma(ct - \beta x)\big)^2$$

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(x - \beta ct)^2 - \gamma^2(ct - \beta x)^2$$

Sacamos factor común:

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2((x - \beta ct)^2 - (ct - \beta x)^2)$$

Desarrollamos:

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2\big((x^2 + \beta ct^2 - 2x\beta ct) - (ct^2 + \beta x^2 - 2ct\beta x)\big)$$

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(x^2 + \beta ct^2 - 2x\beta ct - ct^2 - \beta x^2 + 2ct\beta x)$$

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(x^2 + \beta ct^2 \cancel{- 2x\beta ct} - ct^2 - \beta x^2 \cancel{+ 2ct\beta x})$$

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(x^2 + \beta ct^2 - ct^2 - \beta x^2)$$

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(x^2 - \beta x^2 + \beta ct^2 - ct^2)$$

Factorizamos:

$$x'^2 - (ct')^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) \cdot (x^2 - ct^2)$$

Sustituimos sabiendo que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ y que $\frac{v}{c} = \beta$, luego: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$x'^2 - (ct')^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 (1 - \beta^2) \cdot (x^2 - ct^2)$$

Es decir:

$$x'^2 - (ct')^2 = \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)} \cdot (x^2 - ct^2)$$

Por lo tanto:

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

Q.E.D.

Así, dados, entonces, en las mismas circunstancias definidas, dos sucesos cualesquiera $A\ y\ B$, podremos decir de sus diferencias en el espacio-tiempo respecto a dos Sistemas de Referencia S y S' que:

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

Es decir, podremos afirmar el Invariante de Lorentz:

$$(\Delta S)^2 \equiv (\Delta S')^2$$

Por lo tanto, en un espaciotiempo (ct, x), podremos decir que:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2$$

(OBSERVACIÓN: una transformación de Lorentz puede ser vista de forma abstracta como una especie de *'rotación'* en el espacio minkowskiano complejo de una sola dimensión espacial y una temporal como (x, ict). Esto se traduce desde el espaciotiempo físico (x, t) simplemente cambiando, como ya sabemos, las funciones trigonométricas *'normales'* por sus respectivas hiperbólicas. Así tendríamos que:

$$x' = x\cosh\theta - t\sinh\theta$$

$$ct' = -x\sinh\theta + ct\cosh\theta)$$

-1.9-

Las Transformaciones de Lorentz desde el punto de vista de la Teoría de Grupos: el Grupo de Poincaré

Ya sabemos lo que son los Grupos de Lie. Ahora, ¿qué es el Grupo de Poincaré y por qué vamos a hablar de él?

En física y matemática, el Grupo de Poincaré es el grupo de Lie formado por el conjunto de transformaciones de ***isometrías***[77] del espacio-tiempo de Minkowski.

En dicho sentido, de acuerdo con el principio de covariancia, toda ecuación de la teoría de la Relatividad Especial debe ser invariante bajo transformaciones que pertenezcan al Grupo de Poincaré. Es decir, el Grupo de Poincaré se puede concebir como el grupo maximal que deja invariante todas las ecuaciones de la relatividad especial. Sin embargo, en general, el grupo de Poincaré no desempeña ningún papel importante en teoría de la Relatividad General, ya que el grupo de transformaciones que dejan invariante esa teoría en general no incluye un subgrupo homeomorfo al grupo de Poincaré. El grupo de Poincaré sin embargo sí es importante en la teoría cuántica de campos ordinaria que no incluye los efectos de la gravitación, ya que esa teoría se formula sobre el espacio-tiempo plano de Minkowski.

Así, el grupo de Poincaré incluye, como podemos imaginar:

- Las Rotaciones.
- Las Transformaciones de Lorentz.
- Las Traslaciones.

Es decir, todo aquello con lo que necesitamos trabajar en el mundo relativista.

Es importante recalcar que, para que una teoría sea correcta, para que sea coherente con las observaciones que se han realizado sobre nuestro mundo tal y como lo conocemos, ésta debe ser Invariante bajo Grupos de Poincaré.

[77] Transformaciones que conservan una magnitud invariante.

Para proseguir, retomemos, de nuevo, la invarianza postulada por Minkowski:

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

Para hacer los cálculos menos engorrosos, multipliquemos por (-1) en cada lado de la ecuación:

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$$

Vamos a centrarnos de momento sólo en lado izdo. de la expresión, el lado *primado*. Podemos redefinir:

$$ct' = x^{0'}$$

$$x' = x^{1'}$$

$$y' = x^{2'}$$

$$z' = x^{3'}$$

Y ahora pongámoslo de manera vectorial/matricial. Tendríamos el primer vector fila:

$$\left(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'}\right)$$

Y digamos que:

$$\left(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'}\right)\left(MÉTRICA\right)\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

Recordemos, estamos elaborando de manera vectorial/matricial, el primer término. Fijémonos en que era:

$$(x^{0'})^2 - \left(x^{1'}\right)^2 - \left(x^{2'}\right)^2 - \left(x^{3'}\right)^2$$

Es decir, $+, -, -, -$, por lo que la *MÉTRICA* debe ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, que el vector dual al cuadrado será:

$$(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'})\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{0'}\\x^{1'}\\x^{2'}\\x^{3'}\end{pmatrix}$$

Esto es, desarrollando el lado verde:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{0'}\\x^{1'}\\x^{2'}\\x^{3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{0'}\\-x^{1'}\\-x^{2'}\\-x^{3'}\end{pmatrix}$$

Es decir, que la magnitud invariante, el cuadrado del vector dual (por la métrica de Minkowski), será:

$$(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'})\begin{pmatrix}x^{0'}\\-x^{1'}\\-x^{2'}\\-x^{3'}\end{pmatrix}=(x^{0'})^2-(x^{1'})^2-(x^{2'})^2-(x^{3'})^2$$

Podríamos expresar, entonces, la magnitud invariante que buscamos como:

$$(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'})\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{0'}\\x^{1'}\\x^{2'}\\x^{3'}\end{pmatrix}=(x^0x^1x^2x^3)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

Ahora, esto es muy importante, la transformación que se produce de un sistema S a otro S' podemos caracterizarla como: un vector primado que es el resultado de multiplicar el vector sin primar por una ***matriz Λ transformadora***, es decir:

$$\overrightarrow{x'}=(\Lambda)\vec{x}$$

Es decir, desplegando sus componentes como columna:

$$\begin{pmatrix}x^{0'}\\x^{1'}\\x^{2'}\\x^{3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&\Lambda&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\qquad(1)$$

¿Qué hacemos para recostar las cosas que tenemos en vertical? Pues transponer:

$$\left[\begin{pmatrix}x^{0'}\\x^{1'}\\x^{2'}\\x^{3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&\Lambda&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\right]^T$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}^T$$

O lo que es lo mismo:

$$\left(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'}\right) = (\Lambda)^T(x^0x^1x^2x^3)$$

A continuación, retomemos la expresión invariante que teníamos:

$$\left(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = (x^0x^1x^2x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Fijémonos en el lado izquierdo:

$$\left(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

Y sustituyamos con lo que tenemos:

$$(\Lambda)^T(x^0x^1x^2x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

Pero podemos seguir sustituyendo la parte roja usando lo que tenemos en la expresión (1):

$$(x^0x^1x^2x^3)(\Lambda)^T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Tendríamos, entonces, todo el lado izquierdo de la expresión, para entendernos, el lado del vector primado, en función de una ***matriz Λ*** desconocida y del vector sin primar que, a priori, conocemos (es el que medimos desde S, nuestro sistema de referencia).

Volvamos a replantear, entonces, la expresión con los resultados que tenemos:

$$(x^0x^1x^2x^3)(\Lambda)^T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0x^1x^2x^3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Despejando veremos que:

$$\cancel{(x^0x^1x^2x^3)}(\Lambda)^T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} = \cancel{(x^0x^1x^2x^3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}$$

Es decir, que:

$$(\Lambda)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y ésta es la pista fundamental para poder encontrar qué se esconde dentro de la matriz Λ.

Esto se llama ***Transformación de Lorentz Genérica***. Vamos a llamar η a la matriz que nos define la métrica del espacio de Minkowski, de manera que nos quedará que:

$$(\boldsymbol{\Lambda^T})\eta(\boldsymbol{\Lambda}) = \eta$$

Es decir, que esta *Transformación de Lorentz Genérica* es la que nos deja invariante la *métrica*[78].

Ahora, ¿cómo ponemos estas expresiones a funcionar? Es decir, antes, cuando realizábamos rotaciones en el espacio euclídeo, poníamos a funcionar, a rotar, las matrices para ver qué resultados arrojaban. Ahora, en cambio, sabemos que lo que vamos a hacer no son realmente rotaciones sino Transformaciones de Lorentz. ¿Cómo se activan? ¿Qué hacen al activarse? ¿Rotar? No. Hacen ***Boosts***.[79]

¿Qué es un ***Boost***? En resumidas cuentas, no es otra cosa que ver qué sucede en las coordenadas de los ejes en los que se producen transformaciones a causa del movimiento; ver qué transformaciones se realizan en el eje de desplazamiento e, importante, en el tiempo que, recordemos, en el nuevo escenario relativista siempre cambia para observadores con velocidades diferentes. Es decir: haciendo un ***x-Boost*** estudiaremos cómo se interrelacionan los vectores x y x' mientras se desplaza S' respecto a S a lo largo del eje x.

Igualmente, según S' se desplace sobre un eje x, y o z estaremos realizando ***x-Boost***, ***y-Boost*** o ***z-Boost*** o, si es en una dirección arbitraria no paralela a ningún eje, se define como $\hat{\boldsymbol{n}}$***-Boost***, donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es el vector unitario de la dirección arbitraria en que se mueve y que, presumiblemente, provocará cambios en las coordenadas de los tres ejes, pues será un movimiento azaroso en la esfera de posibilidades tridimensionales.

Recordemos ahora que las Rotaciones cumplen la siguiente propiedad (***Ortogonal***):

$$RR^T = I$$

Es decir, una Rotación por su transpuesta es igual a la Identidad y esto implica que el determinante de *R* o bien es 1 o bien es -1.

Por otro lado, recordemos que tenemos esta expresión:

---

[78] Recordemos que η es una matriz con *estructura* (1:3), es decir, que tiene 1 signo '-' y 3 signos '+' o viceversa (ya sabemos que habitualmente, de hecho, se usa la viceversa).

[79] En una rotación, por ejemplo, la coordenada temporal no se ve afectada pero, como hemos dicho, en un *Boost*, sí. Una T.L. incluye estos dos escenarios: rotaciones y *Boosts* (Poincaré incluye también la Traslación, ya se verá). Explicar un poco por qué se usa ese término.

$$(\boldsymbol{\Lambda^T})\eta(\boldsymbol{\Lambda}) = \eta$$

Obviamente, esto nos está obligando a que la matriz transformadora sea ***Ortogonal*** (no en vano estas transformaciones son del tipo ***SO(1,3)***) pues para que dicha expresión se cumpla $(\boldsymbol{\Lambda^T})\eta(\boldsymbol{\Lambda}) = \eta$, forzosamente $(\boldsymbol{\Lambda^T}) \cdot (\boldsymbol{\Lambda})$ debe ser igual a la ***Identidad.***

Pero tenemos una pista importante: conocemos el determinante de la métrica de Minkowski:

$$\det \eta = -1$$

Por otro lado, también sabemos que:

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta)$$

Ahora bien, también sabemos que el determinante de una matriz y el determinante de su transpuesta valen lo mismo, por lo que podremos decir que esto:

$$\det \Lambda^T \cdot \det \mu \cdot \det \Lambda = \det(\mu)$$

Es lo mismo que esto:

$$\det \Lambda^T \cdot \det \Lambda \cdot \det \mu = \det(\mu)$$

$$(\det \Lambda)^2 \cdot (-1) = (-1)$$

Es decir, que:

$$(\det \Lambda)^2 = \frac{-1}{-1}$$

$$(\det \Lambda)^2 = 1$$

Por lo que $\det \Lambda$, que está al cuadrado, puede ser tanto +1 como -1.

A las Transformaciones de Lorentz que tienen determinante = 1 se le llaman ***Transformaciones Propias*** y a las que tienen determinante =-1, ***Impropias***.

Si en una matriz cuatridimensional el término $t \cdot t'$, es decir, el término ∂_{11} es positivo, se le llama matriz ***ortócrona***.

+			
	-		
		-	
			-

Si dicho término, en cambio, es negativo se le llama: ***anti-ortócrona***.

En nuestro estudio vamos a usar matrices ***Propias*** (***det=1***) y ***Ortócronas*** (∂_{11} es positivo). Esto quiere decir que si partimos de un tiempo para S positivo, obtendremos un t' para S', también positivo[80].

[80] Si la Transformación de Lorentz fuera anti-ortócrona nos daría un tiempo negativo para t'. Mejor movernos en un entorno en que manejemos el tiempo bajo números positivos.

Apliquemos ahora el método de Sophus Lie para realizar una transformación infinitesimal, es decir, que nuestra matriz sea prácticamente igual a la identidad más algo muy, muy pequeño; un diferencial:

$$\Lambda \approx I + A$$

Podemos estudiar la pequeña transformación A jugando con el único parámetro que hay en las Transformaciones de Lorentz: v. Así, cuando:

$$v = 0, resulta\ que\ x^{0'} = x^0$$

Es decir que cuando $v = 0$ tenemos que:

$$\Lambda = I$$

(OBSERVACIÓN: y, por lo tanto, estamos ante Transformaciones Galileanas)

Es decir, cuando la velocidad es cero o muy muy baja, no hay deformación, no hay factor Lorentz *corrector*.

Empecemos, entonces, a probar con valores diferenciales de v de manera que nos movamos en un mundo "*casi*" newtoniano, de velocidades muy, muy, bajas, pero empezando a cambiar milimétricamente el mundo.

Puestos en ello, sustituyamos en la Transformación de Lorentz Genérica:

$$(\Lambda^T)\eta(\Lambda) = \eta$$

Con la nueva expresión que tenemos:

$$\Lambda \approx I + A$$

Y obtendremos:

$$(I + A)^T \eta (I + A) \approx \eta$$

Despejemos la Transpuesta: $(I + A)^T \rightarrow (I^T + A^T) \rightarrow (I + A^T)$, es decir, que la expresión queda como:

$$(I + A^T)\eta(I + A) \approx \eta$$

Ahora desarrollemos el producto:

$$(I + A^T)(\eta + \eta A) \approx \eta$$

Sigamos desarrollando:

$$(\mu + \eta A) + A^T(\eta + \eta A) \approx \eta$$

$$(\eta + \eta A) + A^T\eta + A^T\eta A \approx \eta$$

$$\eta + \eta A + A^T\eta + 0(A^2) \approx \eta$$

(OBSERVACIONES: estamos en infinitesimales, por lo que multiplicar un A infinitensimal por sí mismo, otro infinitesimal, es equiparable a 0)

$$\eta + \eta A + A^T \eta \approx \eta$$

Luego finalmente tenemos que:

$$\eta A + A^T \eta = 0$$

Prosigamos. Sabemos, por nuestro *Invariante Lorentz* que:

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Es decir, que la matriz η tiene una estructura del tipo:

+1	*0*	*0*	*0*
0	*-1*		
0		*-1*	
0			*-1*

Los coeficientes '*receptores*' de la matriz A, que serán multiplicados por la matriz η podrán distribuirse, 'pertenecer', a 4 '*zonas*' diferentes según '*estén destinados*' a ser multiplicados por *(-1)* o no. Las '*zonas*' de A serán:

+1	*0*	*0*	*0*
0	*-1*		
0		*-1*	
0			*-1*

Según pertenezcan a una u otra zona, llamémosles:

A	C
B	D

Con el mismo fin, '*resumamos*' por el momento la matriz η poniéndola, puesto que tenemos sólo 4 zonas diferenciadas, como una matriz de *2x2*:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aceptando estas convenciones, podremos reescribir la expresión:

$$\eta A + A^T \eta = 0$$

Como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^t \\ C^t & D^t \end{pmatrix}^{81}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & -B^t \\ C^t & -D^t \end{pmatrix}^{82} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A + A & C - B^t \\ C^t - B & -D - D^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos empezar a despejar elementos de nuestras matrices sumando elemento a elemento:

$$A + A = 0, luego, necesariamente, \boldsymbol{A = 0}$$

$$C - B^t = 0, luego\ C = B^t$$

$$C^t - B = 0, luego\ C^t = \boldsymbol{B}$$

$$-D - D^t = 0, luego - D = D^t\ (una\ matriz\ \boldsymbol{antisimétrica\ de\ rotación})$$

Veamos, entonces, como puede ser la ***matriz A*** usando los mismos patrones de colores para las diferentes zonas:

1. La zona naranja (A) está formada por un solo término y debe ser cero. √
2. La zona amarilla (B) debe ser igual a la zona verde (C), pero traspuesta. √
3. La zona verde (C) debe ser igual a la zona amarilla (B), pero traspuesta. √
4. La zona azul (D) debe ser una matriz antisimétrica generadora de rotación: √
    i. Debe tener la diagonal principal conformada sólo por ceros.
    ii. A cada lado de la diagonal deben estar los mismos elementos pero opuestos[83].

0	p	q	r
p	0	$-n_3$	n_2
q	n_3	0	$-n_1$
r	$-n_2$	n_1	0

Ya sabemos, más o menos, qué aspecto debe tener, en términos generales, la matriz A y, retornando ahora al procedimiento de Sophus Lie para las transformaciones, decíamos que la matriz Λ que buscamos debe ser del tipo:

---

[81] A no se transpone porque es un solo elemento.

[82] Resultado del producto de matrices.

[83] Recuérdese que $-A = A^t$ es la definición de ***matriz antisimétrica***. Recordemos, además, que una matriz de rotación genérica se definía como, por ejemplo (véase página 53):

$$R_{(\varepsilon)} \approx I + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda \approx I + A$$

Donde A, ya lo hemos visto, es una matriz de componentes tan pequeños que podríamos considerar que:

$$A^2 \approx 0$$

Por otro lado, ya lo sabemos, si tenemos una transformación que es la identidad más algo infinitesimal (y forman un grupo, como es el caso), podremos expresarlo como la exponencial de la matriz A:

$$\Lambda = e^A$$

Es decir, que podremos decir, atendiendo a que la matriz A es esto:

0	p	q	r
p	0	$-n_3$	n_2
q	n_3	0	$-n_1$
r	$-n_2$	n_1	0

Que, de manera explícita, $\Lambda = e^A$ se puede expresar como:

$$\Lambda = \exp\left[p\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

(OBSERVACIÓN: en verde las partes 'naranja-amarilla-verde' de la matriz A y en azul la parte 'azul', también, de la matriz A[84])

Y éstos son los generadores del ***Grupo de Lorentz***: todas las matrices de tipo Λ tales que las traspuestas multiplicadas por η y por ellas mismas sean iguales a η, es decir:

$$\{\exists\, \boldsymbol{\Lambda} \,/\, \forall(\boldsymbol{\Lambda^T \eta \Lambda}) = \boldsymbol{\eta}\}$$

Que forman un conjunto de matrices que, además, conforman un Grupo (podemos ahora usar la palabra "Grupo") porque los elementos de ese conjunto, las matrices, cumplen tres propiedades necesarias para ello:

1. Tengan la Propiedad Asociativa.
2. Tengan elemento neutro: en este caso la Identidad.
3. Dado un elemento, en este caso una matriz, existe su Inverso (esto se cumple porque el determinante de las matrices siempre es diferente de cero y, por lo tanto, pueden tener inverso (Λ^{-1}) sin provocar una indeterminación).

[84] Obsérvese que lo único que se ha hecho es 'sacar' cada elemento y multiplicarlo por una matriz de ceros, unos y menos unos que le dan, a cada elemento, su sitio en la matriz genérica A.

Vamos a expresar esto con la nomenclatura *oficial* de la Relatividad Especial:

$$\Lambda = \exp\left[\omega^0{}_1\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\omega^0{}_2\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\omega^0{}_3\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\omega^2{}_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+\omega^1{}_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}+\omega^1{}_2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

(OBSERVACIÓN: Esto es así $(\omega^0{}_1)$ *porque en Relatividad la primera fila y columna es 0. Y lo que se recoge en los índices es la posición en que aparece el primer término diferente de cero*[85]*)*

A estos generadores, además se les pone un nombre que, después, facilitan mucho las cosas. Las matrices verdes primeras, por orden son: K^1, K^2, K^3 y se les llama ***Generadores de Boosts en los ejes x, y, z***. Las matrices azules segundas, por orden otra vez, son: J^1, J^2, J^3 y se les llama ***Rotaciones en torno a los ejes x, y, z***[86]. Por lo que lo de arriba lo podemos '*resumir*' como:

$$\boldsymbol{\Lambda = \exp[\omega^0{}_1 K^1 + \omega^0{}_2 K^2 + \omega^0{}_3 K^3 + \omega^2{}_3 J^1 + \omega^1{}_3 J^2 + \omega^1{}_2 J^3]}$$

Una matriz con ***6 parámetros*** (las cosas en color) y sobre la que podremos asegurar que cumplen $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ y que, por lo tanto, podremos decir que forman parte del conjunto de Transformaciones de Lorentz.

[85] Recuérdese que las posiciones en estas matrices de Transformaciones de Lorentz se cuentan así:

00	*01*	*02*	*03*
10	*11*	*12*	*13*
20	*21*	*22*	*23*
30	*31*	*32*	*33*

[86] Es muy simple de recordar: en los ***Boosts*** está implicado el ***tiempo***. En las ***Rotaciones***, sólo hay, eso, rotaciones en un espacio, sin tiempo, tridimensional (la zona azul de la matriz A es sólo, eso, una matriz rotacional en 3D).

Hagamos ahora, con esto que sabemos, un ***x-Boost***.

Sabemos que el ***x-Boost*** se hace mediante la matriz K^1, es decir, la matriz en que se recoge el modo en que se ***relacionan*** $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{t}$ (ojo a las posiciones de los componentes$\neq 0$ en la matriz generadora). Así, cómo sólo vamos a 'recorrer' el eje de la x, podremos decir que:

$$\Lambda = \exp[\omega^0{}_1 K^1]$$

Como estamos en una sola dimensión, podríamos ahorrarnos mucho gasto de energías, tinta y aburrimiento eliminando superíndices y subíndices que, tratando de una sola dimensión, no serían necesarios:

$$\Lambda = \exp[\omega K^1]$$

Tenemos entonces:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)}$$

Es decir, un número elevado a una matriz. Algo que nos va a dar, efectivamente, como resultado final, otra matriz: la matriz Λ, que es la transformación que estamos buscando en este ***x-Boost***.

De momento, como ya sabemos algunas cosas, vamos a hacer un '*contraste*. Vamos a anticipar el resultado, aunque después lo deduzcamos paso a paso, con el fin de poder cotejar si ambos caminos nos llevan al mismo resultado.

Procedamos con el '*contraste*. Conocemos las Transformaciones de Lorentz y, por ello, sabemos que (véanse páginas 154 y siguientes):

$$x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$$

$$x^{1'} = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1$$

(OBSERVACIÓN: nótese que hemos alineado, para poder trabajar después matricialmente, las mismas variables en las mismas columnas:

$$\begin{matrix} \gamma x^0 & -\gamma\beta x^1 \\ -\gamma\beta x^0 & \gamma x^1 \end{matrix}\ )$$

En estas ecuaciones estamos relacionando el *tiempo* y el *espacio unidimensional-x* y, además, digamos, conocemos "la proporción" en que se relacionan; conocemos el "modo intrínseco en que se entremezclan las magnitudes". Conocemos, cómo se afectan mutuamente y cómo cambian con el tiempo. Así que sabremos que la matriz que buscamos será del tipo (a nada que se mire se comprende[87]):

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y, además, para todo esto que hemos puesto, el único parámetro que necesitamos conocer para resolver la matriz es la velocidad v con que se mueve el objeto estudiado pues, recordemos:

[87] En la fila $x^{0'}$, los elementos γx^0, $-\gamma\beta x^1$; en la fila $x^{1'}$, los elementos $-\gamma\beta x^0$, γx^1.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

¿No es maravilloso?

Hemos hecho un '*contraste'* y, digamos, ya conocemos la matriz destino a la que queremos llegar. Ahora, recorramos el camino desde el otro lado para ver si contrastamos y llegamos al mismo sitio. Recordemos que:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = e^{\left(\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}$$

Busquemos, pues, qué es esa Omega (ω), el único parámetro que necesitamos.

Para ello, recordemos por un instante el concepto de ***Antisimetría*** y de ***Simetría***.

Sabemos que una matriz es ***Antisimétrica*** cuando se cumple que:

$$A = -A^T$$

Recordemos un ejemplo de *matriz Antisimétrica*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, una matriz es ***Simétrica*** cuando se cumple que:

$$A = A^T$$

Recordemos un ejemplo de *matriz Simétrica*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y sabemos (y si no lo sabemos, aquí lo decimos) que las matrices simétricas y antisimétricas son diagonalizables. Cosa necesaria para poder resolver la exponencial de la matriz, tal y como sabemos por la *nota 25*.

Desarrollemos, entonces, esto (*insistimos, para cualquier duda, véase nota 25*):

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = e^{\left(\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} = e^{\begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Es decir, tenemos un número elevado a una matriz, llamémosla, A: (e^A). Como es diagonalizable podemos decir que:

$$A = PDP^{-1}$$

Es decir, que tendremos que:

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Diagonalicemos, pues, K^1. Para hacer esto tan tedioso hay software que lo calcula de manera automática. Ya sabemos cómo se hace (*insistimos en ver la nota 25*), por lo que no gastaremos tiempo en calcularlo, pues es infinitamente tedioso.

Tenemos los siguientes Vectores Propios con sus respectivos Valores Propios:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ahora, construimos la Matriz de paso P con los Vectores Propios y la matriz diagonal poniendo ***en la diagonal principal*** los Valores Propios, es decir, para K^1:

$$A = PDP^{-1}$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Si comprobáramos el producto, observaríamos que, efectivamente, nos da K^1.

Ahora apliquemos a:

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

A, de hecho, no es simplemente K^1, sino, como sabemos (ωK^1), es decir:

$$A = (\omega K^1) = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualmente, la matriz diagonal D, a la que está elevado, e es:

$$D = (\omega D) = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que sustituyendo en:

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

Tendremos que:

$$e^A = P\begin{pmatrix} e^{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Es decir, que la forma que nos queda finalmente es:

$$e^A = Pe^D P^{-1}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow$$

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^{\omega} & \frac{1}{2}e^{\omega} - \frac{1}{2}e^{-\omega} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\omega} - \frac{1}{2}e^{-\omega} & \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo, por desarrollo en Series de Taylor:

$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que ya tenemos nuestro ***x-Boost*** en función de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, recordemos el '*contraste*' que hicimos. Sabiendo que las Transformaciones de Lorentz se podían expresar como:

$$x^{0'} = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$$

$$x^{1'} = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1$$

Y que, con este '*contraste*' llegamos a:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podríamos decir, entonces, que se debe cumplir que:

$$\cosh\omega = \gamma$$

$$sinh\,\omega = -\gamma\beta$$

Ojo[88], tenemos ahí un signo menos en el seno. Lo que pasa es que la conversión que estaríamos haciendo, en realidad, estaría yendo en este caso desde $\vec{x'}$ a $\vec{x}$, es decir es $\vec{x'}$ la que se multiplica por una matriz Λ para encontrar $\vec{x}$. Esto, en realidad se sería diferente si hubiéramos hecho, desde el principio, lo siguiente (que es como de verdad se hace el ***x-Boost*** *(pasar de* $\vec{x}\cdot\Lambda$ *a* $\vec{x'}$*)*, ojo al negativo en rojo):

$$\Lambda = e^{(-\omega K^1)}$$

Lo que nos hubiera dado (recordemos el signo negativo en rojo: $\Lambda = e^{(-\omega K^1)}$):

$$\Lambda = e^{(-\omega K^1)} = \begin{pmatrix} cosh\,\omega & -sinh\,\omega & 0 & 0 \\ -sinh\,\omega & cosh\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto tendríamos que:

$$cosh\,\omega = \gamma$$

$$-sinh\,\omega = -\gamma\beta \rightarrow sinh\,\omega = \gamma\beta$$

Nuestra transformación, tendría, entonces, esta forma:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \Lambda \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\,\omega & -sinh\,\omega & 0 & 0 \\ -sinh\,\omega & cosh\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo[89]:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\,\omega & sinh\,\omega & 0 & 0 \\ sinh\,\omega & cosh\,\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Es decir:

---

[88] Dejamos todo el desarrollo tal y como lo hemos hecho porque nos parece muy útil para ver cómo "el sentido" del cálculo afectaría a los resultados, sólo, en el "sentido" de la dirección de la transformación.

[89] A causa de la expresión que hemos marcado en azul:

$$-\sinh\omega = -\gamma\beta$$

$$\sinh\omega = \gamma\beta$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si analizamos los elementos que tenemos y jugamos un poco con ellos, podemos observar rápidamente que:

$$\frac{sinh\,\omega}{cosh\,\omega} = tanh\,\omega$$

Es decir:

$$\frac{\gamma\beta}{\gamma} = tanh\,\omega \rightarrow \beta = tanh\,\omega$$

Y como sabemos que:

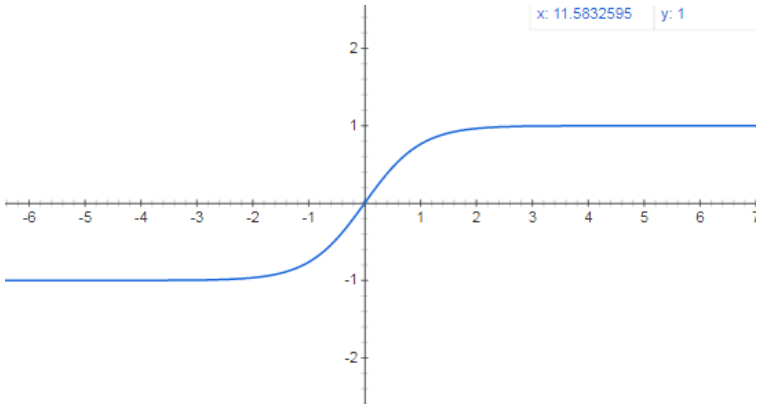
$$\beta = \frac{v}{c}$$

Entonces, muy importante:

$$\boldsymbol{v = c \cdot tanh\,\omega \rightarrow tanh\,\omega = \frac{v}{c}}$$

Es decir, que mientras mayor sea $tanh\,\omega$, mayor será la velocidad, siendo igual a c cuando $tanh\,\omega = 1$.

¿Qué clase de comportamiento tiene $tanh\,\omega$?



Es decir, que mientras más "alejado esté ω de cero" (hacia un lado u otro) más se acerca la función Tangente Hiperbólica a 1 y, por lo tanto, más cerca será la velocidad v a la velocidad de la luz (téngase en cuenta que valores negativos de ω lo deberíamos interpretar como movimiento en el eje x hacia la izquierda con velocidad negativa respecto a cero y valores positivos de ω como movimiento hacia la derecha en el eje de la x y, por lo tanto, velocidad positiva).

En definitiva, ***la velocidad v de cualquier cuerpo, como mucho, será la velocidad de la luz***. Esto, como ya sabemos, es muy muy importante. ***Uno de los postulados fundamentales de la teoría de la relatividad***.

Para el resto de ejes realizaríamos el mismo procedimiento que hemos usado para realizar el ***x-Boost*** pero, naturalmente, realizando los ajustes oportunos de la matriz $\boldsymbol{K^1}$ por $\boldsymbol{K^2}$ (para el eje y) o $\boldsymbol{K^3}$ (para el eje z).

Estos serían los resultados:

y-Boost

(OBSERVACIÓN: recordemos que en nuestra nomenclatura la coordenada y es x^2)

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = e^{(-\omega K^2)}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\,\omega & 0 & -sinh\,\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sinh\,\omega & 0 & cosh\,\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

z-Boost

(OBSERVACIÓN: recordemos que en nuestra nomenclatura la coordenada z es x^3)

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \Lambda & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = e^{(-\omega K^3)}$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\,\omega & 0 & 0 & -sinh\,\omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sinh\,\omega & 0 & 0 & cosh\,\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

MATRICES PARA ROTACIONES

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICES PARA BOOSTS

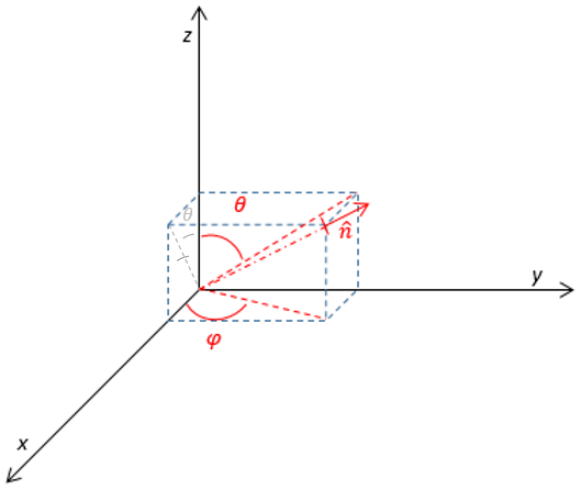
$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a abordar un movimiento arbitrario dentro de la ***parte espacial*** de nuestra estructura espaciotemporal de 4 dimensiones. Es decir, en vez de estudiar, como hasta ahora, movimientos simples, rigurosamente paralelos a un solo eje, vamos a abordar el movimiento en cualquier dirección. Para ello, de manera análoga a lo que hicimos en la sección de rotaciones, vamos a construir un vector unitario $\hat{n}$ en la dirección del movimiento con el que poder realizar un ***$\hat{n}$-Boost***.

En este caso estaríamos ante un escenario similar al siguiente:



Recordemos ahora lo que sabemos de las coordenadas esféricas [90]. Si el radio de nuestra *esfera goniométrica* es 1, ¿cuál es el punto de aplicación del vector unitario $\hat{n}$?

Recordemos:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

(OBSERVACIÓN: efectivamente, la proyección en el plano xy del vector $\hat{n}$ forma con el eje x un ángulo φ adyacente ($\cos\varphi$). Hemos marcado en gris la proyección del ángulo θ en el plano xz para poder apreciar que ejerce, con el eje x, de seno. Las mismas apreciaciones se pueden ver fácilmente con el resto de ejes planos).

Es decir, como $r = 1$:

$$x = \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = \cos\theta$$

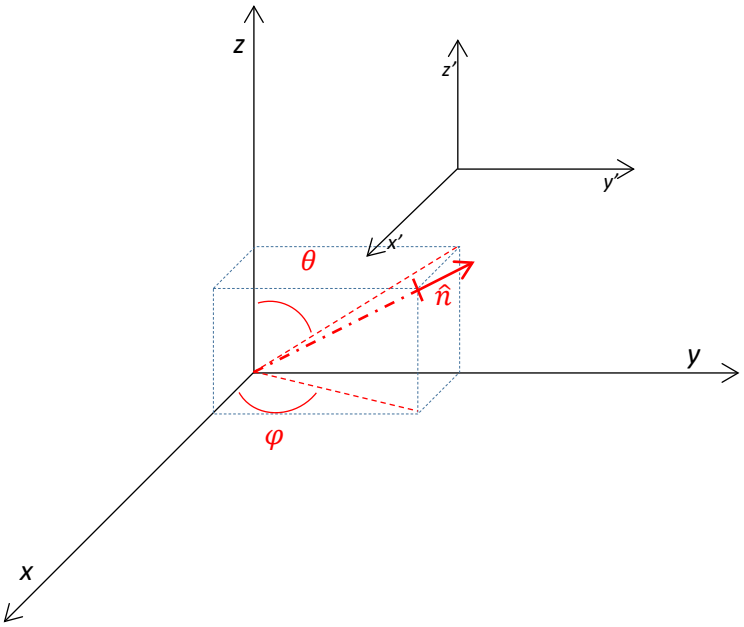
Por lo que el punto de aplicación del vector unitario $\hat{n}$, en coordenadas esféricas, será:

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi\,, \sin\theta\sin\varphi\,, \cos\theta)$$

Nuestro Sistema de Referencia principal está en reposo (es un sistema inercial, no acelerado) y ahora añadimos, como ya nos es conocido, un Sistema de Referencia Inercial

[90] Véase la nota 40.

Primado que se desplaza en un movimiento arbitrario esférico respecto al sistema principal, es decir:



Y, como hemos hecho para los casos anteriores, queremos ver qué Transformación (matriz Λ) se da entre los dos sistemas; definir las coordenadas del espacio y el tiempo según estos dos observadores. Vamos a hacer un ***n̂-Boost***.

Importante, lo que estamos buscando es la Transformación de Lorentz que permitiría ponerse de acuerdo a los dos sistemas de referencia inerciales acerca de lo que está sucediendo con el vector $\hat{n}$.

Así si a reescribimos las componentes del vector $\hat{n}$ como:

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi\,, \sin\theta\sin\varphi\,, \cos\theta)$$

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

Es decir:

$$n_1 = \sin\theta\cos\varphi$$

$$n_2 = \sin\theta\sin\varphi$$

$$n_3 = \cos\theta$$

Podríamos, de manera análoga a como hicimos para el caso de desplazamiento en una sola dimensión, aplicar cada una de estas componentes a la matriz *Boost* correspondiente según afecte a un eje o a otro. La matriz de transformación será del tipo:

$$\Lambda = e^{(-\omega(n_1K^1+n_2K^2+n_3K^3))}$$

(OBSERVACIÓN: nótese que para que el sentido de la transformación sea desde el sistema $x \cdot \Lambda \rightarrow x'$, ya hemos incorporado el signo menos antes de Omega en la matriz a exponenciar)

Que podemos expresar, análogamente, al igual que hicimos en las rotaciones[91], como:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega \cdot \hat{n} \cdot \vec{K}\right]$$

Donde hemos sustituido las matrices generadoras de rotaciones (J^i) por las matrices generadores de Boosts (K^i).

Si reordenamos la expresión, la podemos presentar como:

$$\Lambda = \exp[\omega^0{}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^0{}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^0{}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \omega^2{}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \omega^1{}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega^1{}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}]$$

*(OBSERVACIÓN: en verde los **Boosts** y en azul las rotaciones)*

---

[91] Esto nos debe sonar mucho al modo en que caracterizábamos las rotaciones torno a un eje $\hat{n}$ de dirección arbitraria (véase p.56 y ss.):

$$R(\theta) = \exp\left[\theta\left(n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z\right)\right]$$

Que era lo mismo que decir que:

$$R(\theta) = \exp\left[\theta \cdot \hat{n} \cdot \vec{G}\right]$$

Observemos, por otro lado, que en el caso de las rotaciones usábamos las matrices generadoras de rotación que definíamos como, efectivamente se ve en la expresión anterior: G_x, G_y, G_z (que después hemos renombramos en la página 167 como J^1, J^2, J^3).
Por otro lado, para *ahorrarnos tedio* definimos (demostrándola) una expresión que nos servía de *truco* para desarrollar la exponencial. Dicha expresión, muy importante en cuántica, era:

$$R_{(\theta)}\vec{x} = (1 - \cos\theta)(\vec{x} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta)(\hat{n} \times \vec{x})$$

Que se formulaba finalmente como:

$$R_{(\theta)} = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta){n_x}^2 + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_y)n_x + (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta)(n_z)n_x - (\sin\theta)n_y \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_y - (\sin\theta)n_z & (1-\cos\theta){n_y}^2 + (\cos\theta) & (1-\cos\theta)(n_z)n_y + (\sin\theta)n_x \\ (1-\cos\theta)(n_x)n_z + (\sin\theta)n_y & (1-\cos\theta)(n_y)n_z - (\sin\theta)n_x & (1-\cos\theta){n_z}^2 + (\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Efectivamente, ahora con los ***n̂*-Boosts**, seguimos un procedimiento similar, con la salvedad de que, de momento, no vamos a demostrar la expresión *'truco'*.

Por otro lado, tal y como hicimos en el caso de las rotaciones, para evitar tedio en el desarrollo de esta exponencial (véase nota 91) existe una expresión que nos va a permitir ahorrarnos esfuerzos. De momento no la demostraremos, pero vamos a dar una serie de indicaciones que nos van a permitir entenderla un poco mejor:

$$\Lambda = R_z(\varphi)R_y(\theta)BOOST_z(\omega)R_y(-\theta)R_z(-\varphi)$$

En dicha expresión tenemos recogidos, en coordenadas esféricas (de izquierda a derecha):

- Una rotación en el eje z de φ grados.
- Una rotación en el eje y de θ grados.
- Un *z-Boost* de magnitud ω.
- Una rotación en el eje y de $(-\theta)$.
- Una rotación en el eje z de $(-\varphi)$.

¿De dónde sale una expresión equivalente tan rara? ¿Dónde han quedado nuestras matrices K^i (*Boosts*) de cada dimensión (¡sólo aparece un *Boost*!)?

Para entenderlo tendremos que retomar un poco los conceptos que esbozamos brevemente en la nota 30 acerca del Álgebra de Lie y los Conmutadores.

Como sabemos, con todas las matrices transformadoras que hemos generado conformamos un álgebra cerrada en la que, realizando diferentes combinaciones de conmutación entre los componentes que la conforman (las matrices transformadoras), llegamos a otros componentes, elementos, de ese mismo álgebra.

Por ejemplo, como vimos en la nota 30, si conmutamos dos elementos del álgebra, por ejemplo:

$$[J^1, J^2]$$

Llegamos a otro elemento contenido en el álgebra:

$$J^3$$

Es decir:

$$[J^1, J^2] = J^3$$

Por otro lado, nuestro álgebra, hasta el momento, ya recoge una serie de elementos que ya conocemos[92]:

- Las matrices de Rotación: J^1, J^2, J^3
- Las matrices para *Boosts*: K^1, K^2, K^3

Y, efectivamente, conmutando, podremos dar saltos entre estos elementos aun cuando sean de *naturalezas diferentes*. Es decir, conmutando, por ejemplo, matrices de *Boosts*, llegaremos a matrices de Rotación. Por eso, muy importante, podemos pasar de la expresión:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left[\omega \cdot \hat{n} \cdot \vec{K}\right]$$

A esa *expresión-truco* tan extraña que hemos mencionado:

$$\Lambda = R_z(\varphi)R_y(\theta)BOOST_z(\omega)R_y(-\theta)R_z(-\varphi)$$

Porque, efectivamente, la conmutación de dos matrices del tipo K^i nos va a dar una matriz del tipo J^i. Veamos un ejemplo. Digamos que el siguiente Conmutador se define correctamente así (ya adelantamos que se cumple):

$$[K^1, K^2] = -J^3$$

Sabemos que:

$$[K^1, K^2] = K^1K^2 - K^2K^1$$

Desarrollémoslo (esto es un coñazo, un sudoku aburrido… lo normal es realizar estas operaciones mediante algún software con el móvil o lo que sea, pero por esta primera vez vamos a desarrollarlo para ver 'en directo' el procedimiento):

$$[K^1, K^2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -J^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[92] Recordemos que los grupos de Poincaré reunía tres escenarios:

a. Rotaciones (J^i)
b. Transformaciones de Lorentz (K^i)

Y se nos olvida de momento otro tipo de transformación:

c. Traslaciones, que vendrán definidas por las matrices P^i

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Que, efectivamente es igual a $-\boldsymbol{J^3}$.

Resumamos, entonces, cómo conmutan las diferentes matrices.

1. Conmutadores de ***matrices de rotación con matrices de rotación***:

$$[J^1, J^1] = 0;\ [J^2, J^2] = 0;\ [J^3, J^3] = 0$$
$$[J^1, J^2] = iJ^3 \ \leftrightarrow\ [J^2, J^1] = -iJ^3$$
$$[J^1, J^3] = -iJ^2 \ \leftrightarrow\ [J^3, J^1] = iJ^2$$
$$[J^2, J^3] = iJ^1 \ \leftrightarrow\ [J^3, J^2] = -iJ_1$$

   Sabiendo que, como se puede ver en el listado que hemos puesto:

$$[J^a, J^b] = -[J^b, J^a]$$

   Los conmutadores siguen la norma:

$$\boldsymbol{[J^a, J^b] = \varepsilon_{abc} j^c}$$

2. Conmutadores de '***matrices de Boosts' con 'matrices de Boosts'***:

   Siguen la norma:

$$\boldsymbol{[K^a, K^b] = -\varepsilon_{abc} j^c}$$

   (OBSERVACIÓN: recordemos el ejemplo que expusimos antes: $[K^1, K^2] = -J^3$*)*

   (OBSERVACIÓN 2: obviamente $[K^b, K^a] = \varepsilon_{abc} j^c$*)*

3. Conmutadores de ***matrices de rotación con 'matrices de Boosts'***:

   Siguen la norma:

$$\boldsymbol{[J^a, K^b] = \varepsilon_{abc} K^c}$$

   (OBSERVACIÓN: obviamente $[K^b, j^a] = -\varepsilon_{abc} K^c$*)*

Así, hemos llegado, a lo largo de nuestro estudio sobre los Grupos de Lie en general y el Grupo de Poincaré en particular, a un conjunto de elementos (matrices transformadoras) que dan cuenta de las Rotaciones, las Transformaciones de Lorentz (*Boosts*) y, efectivamente, tal y como comentábamos en la nota anterior (*nota 92*), nos faltan por definir las matrices de ***traslación***→ P^a.

Sabemos lo que representan las matrices J^a, K^a, pero ¿qué representan las matrices de traslación P^a?

Pues, como es de imaginar, ciertamente, una traslación, ojo, en el espacio-tiempo.

Expliquemos qué quiere decir esto.

Hasta ahora hemos estado trabajando en todo momento con Sistemas de Referencia bajo una configuración estándar, es decir: los orígenes coincidían, los ejes eran paralelos, uno se movía respecto al otro con $v \neq 0$ y constante, etc…

Ahora, sin embargo, imaginemos dos sistemas de referencia inerciales que están en una configuración, *casi estándar*. Es decir, ambos Sistema de Referencia:

- Tienen sus ejes paralelos (no están girados respectivamente), pero…
- … No comparten origen, es decir, están en reposo uno respecto del otro (tienen una velocidad mutua entre ellos de $v = 0$) pero parten de lugares-momentos diferentes.

Esto quiere decir que mediante las matrices de tipo P^a podremos estudiar las magnitudes medidas por Sistemas de Referencia inerciales que no comparten origen. Imaginemos que están desplazados sólo en el tiempo (claro, no nos extrañemos, estamos hablando de espaciotiempo), es decir, cuando un Sistema de Referencia (S) tiene un tiempo inicial de $t = 0$, el otro Sistema de Referencia (S') tiene un tiempo inicial de, por ejemplo, $t' = 5$. Después, ambos, discurren con un tiempo normalizado entre ellos, pero con dicho desplazamiento de 5 segundos, es decir:

$$S \to t = 0 \qquad S' \to t' = 5$$

$$S \to t = 1 \qquad S' \to t' = 6$$

$$S \to t = 2 \qquad S' \to t' = 7$$

...

Es decir, que la transformación que se produce requiere de la añadidura de una constante (una Traslación). Según el ejemplo que hemos puesto, la transformación debería tener una forma del tipo:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + 5$$

Para estudiar esto tendríamos, como ha sucedido en los casos anteriores, cuatro matrices 'generadoras' diferentes: una por cada dimensión más otra adicional para el tiempo:

$$P^0 = desplazamiento\ /\ desfase\ en\ el\ tiempo\ inicial(ct)$$

$$P^1 = desplazamiento\ /\ desfase\ 'del\ espacio\ inicial'\ en\ el\ eje\ x(x)$$

$$P^2 = desplazamiento\ /\ desfase\ 'del\ espacio\ inicial'en\ el\ eje\ y(y)$$

$$P^3 = desplazamiento\ /\ desfase\ 'del\ espacio\ inicial'\ en\ el\ eje\ z(z)$$

Así, si un Sistema de Referencia está desplazado del otro sólo en el tiempo y en el eje x, las matrices que se aplican serían la P^0 y la P^1.

Si, en cambio, estamos ante Sistemas de Referencia que, en absoluto, están en configuración estándar (¡ni de lejos!), es decir, que están rotados, en movimiento uno respecto del otro, sin compartir origen, … efectivamente, habrá que aplicar todas las matrices transformadoras que

conocemos para dar cuenta de la "traducción" de las magnitudes entre sistemas. Nuestro álgebra de transformaciones está compuesto, entonces de las matrices:

$$J^1, J^2, J^3, K^1, K^2, K^3, P^0, P^1, P^2, P^3$$

Rotaciones

Boosts

Traslaciones

Pero, ¿por qué hay cuatro matrices de tipo P^i en vez de tres como en los otros casos? Y, más importante aún, ¿qué forma tiene esta matriz de traslación?

En respuesta a la primera pregunta tendremos que recordar que tanto en las rotaciones como en los *Boosts* todas las transformaciones se hacían exclusivamente en tres dimensiones. En este sentido, recordemos que hacíamos desarrollos para escenarios en que se producían cambios exclusivamente en un solo eje. Después realizábamos los cambios oportunos para ver qué sucedía en los otros dos ejes. Y finalmente, realizábamos un estudio para cambios en una dirección libre con componentes en las tres dimensiones. El tiempo contaba pero, como partíamos del mismo origen temporal, no teníamos necesidad de modificar nada.

Ahora, en cambio, a dichas matrices, habrá que añadirles ***un nuevo componente constante aplicable a cualquiera de las cuatro dimensiones ya consideradas***, tal y como hemos visto en la expresión:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + 5$$

¿Cómo añadimos una nueva componente a las matrices que ya tenemos? Pues añadiendo una fila/columna que recoja esta constante adicional que estamos añadiendo a causa del desplazamiento en el espaciotiempo. ¿Cómo hacemos esto? Del siguiente modo:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + 5$$

Podemos expresarlo como[93]:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x'} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & 5 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overrightarrow{x'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda\vec{x} + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde, como sabemos, Λ (llamémosla Λold) es una matriz de $4x4$. Es decir, que la nueva matriz transformadora Λ que necesitamos debe ser del tipo:

Matriz Λ 4x4				s_0
				s_1
				s_2
				s_3
0	0	0	0	1

[93] *Truco* de las ***coordenadas homogéneas***. Esto se hace para incrementar en una fila/columna una matriz: añadir algo del tipo:

■	■	■	0
■	■	■	0
■	■	■	0
0	0	0	1

Por lo que la matriz P^0 , la matriz generadora de traslación en el tiempo que necesitamos, debería ser del tipo:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero, efectivamente, seguramente veamos algo que nos chirría, ¿dónde está el '1' de la esquina inferior izquierda que proponíamos en nuestra '*matriz necesaria*'? Si pensamos esto es que nos hemos despistado un poco por el camino. Pensemos un momento sobre esto porque, en primera instancia, puede presentársenos como algo un poco confuso. Reflexionemos brevemente sobre cómo funcionan estas matrices que estamos generando y que no dejan de ser algo así como *matrices dentro de matrices*.

Recordemos, por ejemplo, el caso del *x-Boost*. Para ello usábamos una matriz generadora:

$$K^1: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz '*generadora*', ya lo vemos, no tiene ningún 1 en la diagonal. Obviamente, ya debemos saber que no podría de ninguna de las maneras, pues debe ser una matriz simétrica en este caso o antisimétrica en el caso de las Rotaciones.

Es más tarde cuando vamos a obtener ese '1' en la esquina inferior izquierda, cuando realicemos esta operación:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = e^{\left(\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)} = e^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^{\omega} & \frac{1}{2}e^{\omega} - \frac{1}{2}e^{-\omega} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\omega} - \frac{1}{2}e^{-\omega} & \frac{1}{2}e^{-\omega} + \frac{1}{2}e^{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, la que tiene ese 1 en la esquina es la Λ que resulta de exponenciar la matriz generadora K^1 [94].

En este caso, efectivamente, para obtener una matriz Λ que sea el resultado de exponenciar una matriz generadora, debemos modificar un poco las matrices generadoras que hemos manejado hasta el momento. Es muy simple, como ya hemos vislumbrado en el ejemplo acerca de una traslación temporal de 5 segundos: $\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + 5$.

Veamos cómo se hace. Las matrices generadoras, hemos visto, eran:

- De $3x3$ para el caso de las rotaciones.

[94] Obviamente ese 1 aparece cuando se eleve el número e al 0 ($e^0 = 1$) que hay en ese lugar en la matriz generadora.

- Después añadíamos una columna más para el tiempo (que naturalmente implicaba añadir una fila más para que siguiera siendo cuadrada) y obteníamos matrices generadoras de *Boosts* de $4x4$.
- Ahora, para añadir la traslación como un 'desfase' inicial constante, debemos añadir una columna más (con su consiguiente fila) de manera que estemos ante una matriz de $5x5$, como la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$a^0 = tiempo$$

$$a^1 = eje\ x$$

$$a^2 = eje\ y$$

$$a^3 = eje\ z$$

Y la fila de abajo del todo, en verde, es la fila auxiliar que nos permite mantener la matriz cuadrada[95].

Así, definitivamente, las matrices que recojan esa traslación, *desfase inicial*, tendrán cuatro formas:

- Para desplazamiento en el ***tiempo***:

$$P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para el desplazamiento en el ***eje x***:

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para el desplazamiento en el ***eje y***:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para el desplazamiento en el ***eje z***:

[95] Importante, esta misma fila auxiliar habrá que añadirla a todas las matrices generadoras auxiliares de dimensión menor si queremos que interaccionen entre ellas.

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que, definitivamente, como ya hemos dicho, contamos con 10 matrices generadoras de transformación:

$$J^1, J^2, J^3, K^1, K^2, K^3, P^0, P^1, P^2, P^3$$

Rotaciones

Boosts

Traslaciones

Cuyas conmutaciones (con P) son[96]:

$$[J^a, P^0] = 0; \qquad a = 1,2,3$$

$$[J^a, P^b] = \varepsilon_{abc} P^c; \qquad b = 1,2,3$$

(OBSERVACIÓN: b=1, 2, 3, es decir, sólo las matrices de traslación espaciales no la temporal: P^0; $\varepsilon = \pm 1$)

$$[K^a, P^0] = P^a; \qquad a = 1,2,3$$

$$[K^a, P^i] = P^0; \qquad a = 1,2,3$$

$$[K^a, P^b] = 0; \qquad a \neq b, b = 1,2,3$$

Finalmente, para ir cerrando esta sección, ya lo hemos dicho, el ***Grupo de Poincaré es el Grupo de Lie formado por el conjunto de Isometrías del espaciotiempo de Minkowski***. Esto es, el conjunto de transformaciones que dejan invariante una magnitud, a saber: las ***Rotaciones, las Transformaciones de Lorentz y las Traslaciones***. Así, según el principio de covarianza, toda ecuación de la ***Teoría de la Relatividad Especial*** debe ser invariante bajo transformaciones que pertenezcan al Grupo de Poincaré. Es justamente en este sentido que ***la covariancia de Lorentz*** o ***Principio Especial de la Relatividad*** hace referencia a la propiedad de ciertas ecuaciones/leyes físicas de no cambiar de forma bajo cambios de coordenadas de un tipo particular (en concreto, aquellas que recogen el Grupo de Poincaré).

El grupo de Poincaré es, de hecho, una extensión del Grupo de Lorentz (que también es un subgrupo de los Grupos de Lie), al que se le añaden las ***Rotaciones*** (***Special***, por eso es $SO(1,3)$) y las ***Traslaciones*** en un espacio de Minkowski.

[96] El resto de conmutadores, como ya sabemos, está recogido en las páginas anteriores.

$$\mathcal{P} = \mathbf{R}^{1,3} \rtimes O(1,3) \subset GL(\mathbb{R}^5)$$ [97]

Así, cualquier elemento del Grupo de Poincaré está representado como una matriz Λ de transformación cuya tipología ya conocemos de sobra:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{10} & \Lambda_{20} & \Lambda_{30} & s_0 \\ \Lambda_{01} & \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \Lambda_{31} & s_x \\ \Lambda_{02} & \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32} & s_y \\ \Lambda_{03} & \Lambda_{13} & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} & s_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(OBSERVACIÓN: las donde Λ_{ij} son los componentes matriciales que definen un elemento del Grupo de Lorentz y los s_x, s_y, s_z son las constantes que dan cuenta de las traslaciones espaciales y temporales, siendo s_0 una traslación temporal)

Las propiedades del Grupo de Poincaré son:

- El grupo de Poincaré es un Grupo de Lie no compacto 10-dimensional (10 matrices generadoras).
- De acuerdo con el programa de Erlangen[98] la geometría del espacio de Minkowski está definida por el Grupo de Poincaré.
- El grupo de Poincaré contiene al subgrupo abeliano formado por las traslaciones que además constituyen un subgrupo normal mientras que el grupo de Lorentz es un subgrupo, el estabilizador de un punto.
- De la propiedad anterior se sigue que el grupo de Poincaré es un producto semidirecto de las traslaciones y las transformaciones de Lorentz.
- Sus representaciones irreducibles unitarias de energía positiva se indexan por dos parámetros escalares, que en física se pueden interpretar como la masa (número no negativo) y el espín (número entero o semientero), y se asocia a las partículas en mecánica cuántica.
- El espacio de Minkowski se considera como un espacio homogéneo para el grupo.

El álgebra de Lie asociada al Grupo de Poincaré son, justamente, las diferentes conmutaciones que hemos visto en estas secciones.

[97] En la teoría de grupos, un producto semidirecto ($\rtimes$) describe una forma particular en la cual un grupo puede ser compuesto de dos subgrupos.

[98] Ante la aparición de las nuevas geometrías no euclidianas, parece lógico preguntarse qué es la Geometría, máxime cuando la propia idea de la geometría euclidiana se había visto modificada desde la irrupción de los métodos algebraicos y analíticos. Empieza a no estar tan claro que la Geometría sea el estudio de puntos, líneas (rectas o curvas) y superficies, puesto que el propio Análisis Matemático (sobre todo en el estudio de Ecuaciones Diferenciales) parece estudiar también tales objetos. Por otra parte, los métodos analíticos y algebraicos también son aplicables a las geometrías no euclidianas. Hay, digamos, dos niveles de distinciones: por un lado, la de las geometrías no euclidianas y la geometría euclidiana, por otro lado, la distinción entre el método sintético, el algebraico y el analítico.
Felix Klein dio respuesta a esta pregunta introduciendo en la Geometría un nuevo concepto de carácter algebraico: el concepto de grupo.

-1.10-

Aplicando las Transformaciones definidas por los Grupos de Poincaré

$\int$

Ya hemos terminado de esbozar, desde la Teoría de Grupos, cómo se definen las transformaciones que dejan invariante una magnitud[99]. Así, desde el Grupo de Poincaré hemos configurado un escenario en el que contamos con:

a. Un espaciotiempo.
b. Una métrica.
c. Una serie de Transformaciones:
    i. Rotaciones.
    ii. Transformaciones de Lorentz (*Boosts*).
    iii. Traslaciones.

Sabemos, además, que toda transformación, consistente ***con*** el Grupo de Poincaré, deja invariante una magnitud que se puede definir según la expresión:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = (\Lambda)\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

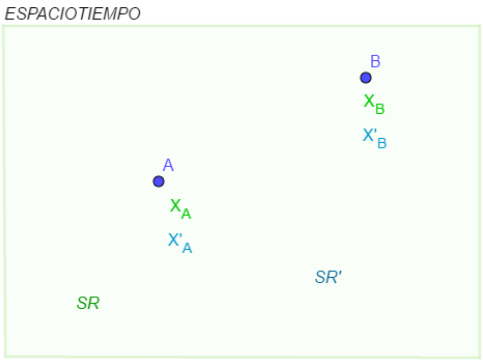
Es decir:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + cte$$

Y, esto es fundamental, tenemos que toda ley física, para ser consistente con la naturaleza observada, debe ser coherente con las transformaciones definidas en el Grupo de Poincaré. Apliquemos, ahora, esto que ya conocemos teóricamente, a un caso práctico.

[99] Hemos visto, por otro lado, el rol fundamental que en esta invarianza desempeña la definición del producto escalar.

Supongamos dos puntos (en realidad dos sucesos) en un espaciotiempo. Dichos eventos estarían definidos, cada uno de ellos, por una tétrada de coordenadas espaciotemporales. Si, además, tenemos dos Sistemas de Referencia Inerciales[100] que observan dichos eventos, cada uno de ellos usará coordenadas diferentes. Veamos el siguiente esquema:



Donde es fácil ver que SR definirá las coordenadas de los eventos X_A y X_B como:

$$X_A = \begin{pmatrix} x_A^0 \\ x_A^1 \\ x_A^2 \\ x_A^3 \end{pmatrix} \qquad X_B = \begin{pmatrix} x_B^0 \\ x_B^1 \\ x_B^2 \\ x_B^3 \end{pmatrix}$$

Mientras que SR' las definirá como:

$$X'_A = \begin{pmatrix} x'^0_A \\ x'^1_A \\ x'^2_A \\ x'^3_A \end{pmatrix} \qquad X'_B = \begin{pmatrix} x'^0_B \\ x'^1_B \\ x'^2_B \\ x'^3_B \end{pmatrix}$$

Y, como sabemos, la relación entre Sistemas de Referencia, es decir, la Transformación que sufren dichas coordenadas para pasar de un Sistema de Referencia a otro viene dada por:

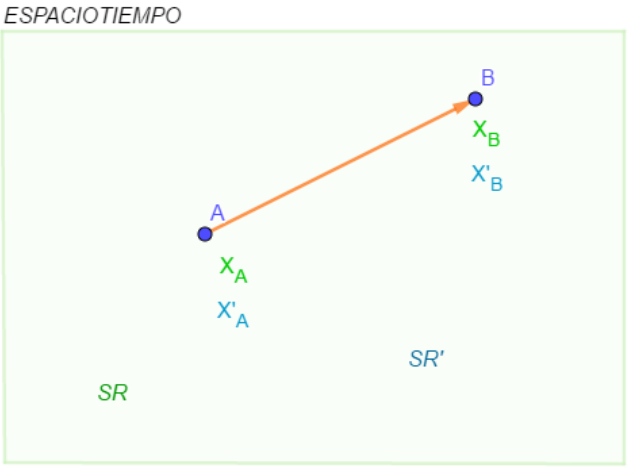
$$X'_A = \Lambda \cdot X_A + a \quad [101]$$

$$X'_B = \Lambda \cdot X_B + a$$

Imaginemos ahora que queremos medir la distancia entre los dos eventos A y B. Para ello calcularemos, como se hace desde siempre, la diferencia entre las coordenadas del punto final menos el punto inicial, a saber:

[100] Los Sistemas de Referencia pueden estar entre ellos en las múltiples configuraciones que ya hemos manejado: rotados, trasladados, en reposo mutuo, con velocidad constante, …

[101] Esta constante de translación a es igual en ambos casos pues no es otra cosa que el desplazamiento que tiene SR' respecto de SR. Al desarrollar estas expresiones, siempre se anulará.



Donde el ***cuadrivector*** (pues tiene cuatro componentes) que hemos dibujado será el resultado de:

$$cuadrivector^{102} = X_B - X_A$$

Como sabemos, en la geometría euclídea, la longitud de un vector podíamos calcularla mediante el producto escalar, donde la longitud de un vector $\vec{a}$ sería:

$$longitud\ de\ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Es decir, que el producto de un vector consigo mismo nos da la longitud del vector al cuadrado:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \ \textit{(que ya es un escalar)}$$

Esto era así porque si teníamos un vector $\vec{a}$ definido según una base vectorial, por ejemplo, del siguiente modo:

$$\vec{a} = 2x + 3y \quad ^{103}$$

Tendríamos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 2^2 + 3^2 = 13$$

Esto seguiría siendo así aunque la base que hubiéramos usado no fuera x e y, sino otros vectores unitarios de un sistema rotado.

Es decir, el producto escalar, en el espacio euclídeo, al partir de una base ortogonal, se conserva para cualquier observador (recordar la definición de la métrica como resultado del desarrollo del producto vectorial).

Eso era en el espacio euclídeo pero ahora, ¿cómo hacemos un producto escalar que mantenga dicha propiedad de invarianza en el espacio de Minkowski? Obviamente, como podemos imaginar, empleando la métrica.

---

[102] Lo abreviaremos como $qvector$.

[103] x e y serían vectores base unitarios en un espacio euclídeo de dos dimensiones.

Para comenzar nuestro desarrollo, comencemos por hacer el producto escalar de nuestro $qvector$ consigo mismo:

$$qvector \cdot qvector = (X_B - X_A) \cdot (X_B - X_A)$$

Como sabemos que tanto X_B como X_A son vectores columnas, su diferencia será, también, un vector columna. Pero, recordemos el ejemplo que hemos usado para el producto escalar en el espacio euclídeo, nosotros necesitamos un número, un escalar de manera que, pensando en las propiedades del producto entre matrices, podríamos reformular nuestra expresión como:

$$fila \cdot columa$$

De manera que, efectivamente, llegaríamos a un polinomio (que nos podría llevar a un escalar si somos capaces de sustituir sus variables):

$$(\Delta x^0_{BA} \quad \Delta x^1_{BA} \quad \Delta x^2_{BA} \quad \Delta x^3_{BA}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^0_{BA} \\ \Delta x^1_{BA} \\ \Delta x^2_{BA} \\ \Delta x^3_{BA} \end{pmatrix} = (\Delta x^0_{BA})^2 + (\Delta x^1_{BA})^2 + (\Delta x^2_{BA})^2 + (\Delta x^3_{BA})^2$$

Que ya, efectivamente, es un escalar. Si, además, para incluir las propiedades del espaciotiempo de Minkowski introducimos la métrica[104] correctora, obtendríamos que[105]:

$$(\Delta x^0 \quad \Delta x^1 \quad \Delta x^2 \quad \Delta x^3) \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

Que, como es de imaginar, responde a la misma forma para el sistema SR':

$$(\Delta x'^0 \quad \Delta x'^1 \quad \Delta x'^2 \quad \Delta x'^3) \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2$$

De manera que el producto escalar en el espaciotiempo de Minkowski se definiría como:

$$(\Delta x)^T \eta \, (\Delta x)$$

Es decir, que resulta que podemos afirmar que si definimos el ***producto escalar*** como:

- Algo en forma de fila.
- Por la métrica.

---

[104] Recordemos que la métrica del espaciotiempo de Minkowski es:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[105] Sustituimos la notación Δx^0_{BA} por Δx^0 ya que al tener el símbolo Δ ya sabemos que se trata de una diferencia entre dos puntos; en este caso de los puntos $B - A$.

- Por algo en forma de columna.

Garantizamos que el producto escalar es invariante bajo Transformaciones de Lorentz o, mejor aún, bajo Transformaciones del Grupo de Poincaré. Es decir que hemos definido el producto escalar como:

$$(\Delta \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\eta}\, (\Delta \boldsymbol{x})$$

O, más generalmente, podremos decir que el producto escalar entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el espaciotiempo será:

$$(\vec{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{\eta}\, \vec{\boldsymbol{b}}$$

Por otro lado, sabemos que las '***longitudes al cuadrado de los dos vectores***' debe ser invariante:

$$\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2$$

Pero… aun sabiéndolo, por los desarrollos que hemos venido haciendo hasta el momento, ¿por qué no lo demostramos ahora desde la definición del producto escalar en el espaciotiempo de Minkowski? Es decir, ¿es cierto esto?

$$(X'_B - X'_A) \cdot (X'_B - X'_A) = (X_B - X_A) \cdot (X_B - X_A)$$

Pues vamos a demostrarlo.

En primer lugar representemos el producto escalar en la base primada (desde SR'):

$$(X'_B - X'_A) \cdot (X'_B - X'_A)$$

Sabemos, por definición, que:

$$X'_A = \Lambda \cdot X_A + a$$

$$X'_B = \Lambda \cdot X_B + a$$

Por lo que si sustituimos tendremos que:

$$[(\Lambda \cdot X_B + a) - (\Lambda \cdot X_A + a)] \cdot [(\Lambda \cdot X_B + a) - (\Lambda \cdot X_A + a)]$$

$$[\Lambda \cdot X_B + a - \Lambda \cdot X_A - a] \cdot [\Lambda \cdot X_B + a - \Lambda \cdot X_A - a]$$

$$[\Lambda \cdot X_B - \Lambda \cdot X_A] \cdot [\Lambda \cdot X_B - \Lambda \cdot X_A]$$

Si ahora sacamos factor común:

$$\Lambda[X_B - X_A] \cdot \Lambda[X_B - X_A]$$

Y como sabemos, por la definición que hemos hecho del producto escalar que:

$$(\Delta x)^T \eta\, (\Delta x)$$

Entonces podremos reescribir como:

$$(\Lambda[X_B - X_A])^T \cdot \eta \cdot\ \Lambda[X_B - X_A]$$

Como sabemos ***que la traspuesta de un producto es lo mismo que invertir el orden de los factores y trasponer***, es decir:

$$[X_B - X_A]^T \Lambda^T\, \eta\, \Lambda[X_B - X_A]$$

Y como sabemos que en las Transformaciones de Lorentz[106]:

$$\Lambda^T\, \Lambda = I$$

Podemos expresar como finalmente que:

$$[X_B - X_A]^T\, \eta\, [X_B - X_A]$$

Que es justamente el modo en que hemos definido el producto escalar en la expresión:

$$(\Delta x^0 \quad \Delta x^1 \quad \Delta x^2 \quad \Delta x^3) \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

Q.E.D.

Que, como sabemos, es de vital importancia pues acabamos de demostrar un invariante (que ya conocíamos) desde la definición del producto escalar en el espaciotiempo de Minkowski.

Prosigamos con el análisis acerca de cómo se comportan las cosas en este espaciotiempo. Para ello construyamos ahora una base vectorial para este espaciotiempo de Minkowski según se ve desde el ***Sistema de Referencia SR***. Para dicha construcción usemos los

[106] Recordemos, muy importante, que en la página 158 definíamos las transformaciones de Lorentz como aquellas en las que el producto escalar producía estos resultados: $(\Lambda^T \mu \Lambda) = \mu$

vectores más evidentes: 4 vectores linealmente independientes; 1 para cada dimensión. Así tendremos:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (tiempo)$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (eje\ x)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (eje\ y)$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (eje\ z)$$

Ahora definamos el *qvector* que trazamos antes ($X_B - X_A$) usando la base definida como sus componentes:

$$qvector = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} \cdot base\ vectorial = \Delta x^0 e_0 + \Delta x^1 e_1 + \Delta x^2 e_2 + \Delta x^3 e_3$$

Y para que esto que hemos definido *pueda ser considerado un cuadrivector* del espaciotiempo de Minkowski deberá cumplir que al ser multiplicado escalarmente por sí mismo debe arrojar el mismo resultado con independencia del sistema de referencia desde el que se mida. Es decir, que se conserve bajo Transformaciones de Poincaré. Veamos si esto es así:

$$qvector \cdot qvector = (\Delta x^0 e_0 + \Delta x^1 e_1 + \Delta x^2 e_2 + \Delta x^3 e_3) \cdot (\Delta x^0 e_0 + \Delta x^1 e_1 + \Delta x^2 e_2 + \Delta x^3 e_3)$$

Puesto que el producto escalar es lineal[107] vamos a poder aplicar la propiedad distributiva. Esto es tedioso y largo, pues son muchas combinaciones pero, en resumidas cuentas, el tipo de combinaciones que nos van a salir respecto a la base serán:

- Subíndices diferentes.

(OBSERVACIÓN: recordemos que hemos definido el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ como $(\vec{a})^T\ \eta\ \vec{b}$)

Tendremos que, por ejemplo:

$$e_0 \cdot e_1 = {e_0}^T \cdot \eta \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

[107] Véase p. X.

Es decir, que anularía el factor completo (y esto pasa para vectores base con subíndices diferentes pues son linealmente independientes).

$$e_\mu \cdot e_\nu = 0;\ \forall \mu \neq \nu \quad ^{108}$$

Por lo que nos quedaríamos sólo con los factores multiplicados por vectores base con subíndices iguales:

$$= (\Delta x^0)^2 e_0 \cdot e_0 + (\Delta x^1)^2 e_1 \cdot e_1 + (\Delta x^2)^2 e_2 \cdot e_2 + (\Delta x^3)^2 e_3 \cdot e_3$$

Por otro lado cuando estamos ante…

- Subíndices iguales.
  Resulta que:

$$e_0 \cdot e_0 = {e_0}^T \cdot \eta \cdot e_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = -1$$

$$e_1 \cdot e_1 = {e_1}^T \cdot \eta \cdot e_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$e_2 \cdot e_2 = {e_2}^T \cdot \eta \cdot e_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$e_3 \cdot e_3 = {e_3}^T \cdot \eta \cdot e_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1$$

Que aplicado al resultado que ya tenemos:

$$= (\Delta x^0)^2 e_0 \cdot e_0 + (\Delta x^1)^2 e_1 \cdot e_1 + (\Delta x^2)^2 e_2 \cdot e_2 + (\Delta x^3)^2 e_3 \cdot e_3$$

nos deja la expresión como:

$$= -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

Por otro lado, el Sistema de Referencia SR', como es natural, también expresará los parámetros que definen al vector según su propio punto de vista. Para ello definirá también una base. Y, parece obvio, lo hará desde su propio punto de vista.

Recordemos que SR' puede estar rotado, desplazado, en movimiento uniforme respecto a SR, etc… por lo que necesitaríamos encontrar un factor (va a ser una matriz) de relación entre las bases de los dos Sistemas de Referencia. Es decir, necesitaremos una matriz que nos ayude a traducir las bases vectoriales entre los sistemas.

[108] En relatividad la notación habitual para subíndices que incluyen el cero suele ser una letra griega, mientras que si no lo incluyen suele ser una letra latina:

$$\mu, \nu, \ldots = 0,1,2,3,\ldots$$
$$i, j, k, \ldots = 1,2,3,4,\ldots$$

Procedamos a ello. SR' diría algo así como que:

$$qvector' = \begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} \cdot base\ vectorial' = \Delta x'^0 e'_0 + \Delta x'^1 e'_1 + \Delta x'^2 e'_2 + \Delta x'^3 e'_3$$

¿Cómo se definiría, desde SR', el vector base e'_0?

Pues se procedería de una manera similar a lo que se hizo desde SR, es decir, usando la línea que une A y B como elemento base de manera que definiría un vector unitario base en la dirección de la recta que une los dos puntos, algo así como:

$$e'_0 = \begin{matrix} \Delta x'^0 = 1 \\ \Delta x'^1 = 0 \\ \Delta x'^2 = 0 \\ \Delta x'^3 = 0 \end{matrix}$$

En un primer momento podría parecer que coincide perfectamente con el de SR pues, digamos, la base, el "suelo", la "horizontalidad" la toman del mismo sitio. Pero la cuestión es que ese "1" no tiene porqué significar lo mismo que el "1" en la base de SR pues, de hecho, son dos sistemas que están girados, rotados, oblicuos, desplazados…

Naturalmente desde SR' se verá absolutamente normal y se definirá como $(1,0,0,0)$ pero la cuestión es ¿cómo se ve desde SR lo que se define en SR'? ¿Qué transformación, *traducción*, hay entres los elementos de la base vectorial de los dos Sistemas de Referencia?[109]

La cuestión es, en definitiva, cómo definir el vector e'_0 con respecto al sistema SR que tiene base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$… Pues para empezar, simplemente, lo que podemos asegurar es que e'_0 debe poder expresarse como una combinación lineal de $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$[110]. Es decir, algo como (usamos la letra 'F' de '*factor corrector*'):

$$e'_0 = F_0 e_0 + F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 \quad [111]$$

Pero además, es que necesitamos hacer lo mismo para cada elemento de la base del sistema SR'. Así, para ello, pensemos en qué número/s habría que poner acompañando a cada

[109] Recordemos que el vector estudiado $\overrightarrow{AB}$ debe medir lo mismo aunque esté definido por dos observadores en bases diferentes.

[110] Esto es evidente por sí mismo. Recordemos cuando definíamos los ejes ct' y x' para la representación gráfica de eventos relativistas. Ambos ejes, ct' y x' eran una línea imaginaria contenida en el plano ct y x, es decir, desde el marco de referencia ct, x podíamos imaginar, con respecto a sus propias referencias internas (las de ct, x) qué pinta tendrían, '*aquí*', los ejes ct' y x'.
Pues lo mismo sucede ahora en el espaciotiempo tetradimensional, que los vectores base de SR' podremos definirlos, desde el punto de vista SR mediante la base vectorial de SR; como una base vectorial prima que podemos dibujar mediante una combinación de su propia base vectorial (la de SR).

[111] Naturalmente el vector e'_0 de SR' se puede expresar como la suma (o resta, ya veremos qué es esa F) de otros vectores (los vectores de la base de SR).

elemento componente de cada elemento de la base para definir, modificando, la base original… lo he expresado un poco lioso… mejor veámoslo:

$$e'_0 = F_{00}e_0 + F_{01}e_1 + F_{02}e_2 + F_{03}e_3$$
$$e'_1 = F_{10}e_0 + F_{11}e_1 + F_{12}e_2 + F_{13}e_3$$
$$e'_2 = F_{20}e_0 + F_{21}e_1 + F_{22}e_2 + F_{23}e_3$$
$$e'_3 = F_{30}e_0 + F_{31}e_1 + F_{32}e_2 + F_{33}e_3$$

A todas luces una matriz, por lo que podremos resumir la '*expresión de transformación de bases*' como:

$$\begin{pmatrix} e'_0 \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = (Matriz\ F) \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Claro…¿qué es esa *F*? ¿Cuáles son sus componentes?... Sigamos indagando.

De momento sabemos que la expresión:

$$qvector' = (\overrightarrow{\Delta x'}) = \Delta x'^0 e'_0 + \Delta x'^1 e'_1 + \Delta x'^2 e'_2 + \Delta x'^3 e'_3$$

Podemos expresarla matricialmente como:

$$(\overrightarrow{\Delta x'}) = \begin{pmatrix} \Delta x'^0 & \Delta x'^1 & \Delta x'^2 & \Delta x'^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e'_0 \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$$

Y como, previamente, hemos definido que:

$$\begin{pmatrix} e'_0 \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = (Matriz\ F) \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Podemos sustituir como:

$$(\overrightarrow{\Delta x'}) = \begin{pmatrix} \Delta x'^0 & \Delta x'^1 & \Delta x'^2 & \Delta x'^3 \end{pmatrix} \cdot (Matriz\ F) \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, ¿qué estamos buscando? Que estas magnitudes sean invariantes para cualquier Sistema de Referencia, es decir buscamos que:

$$\left(\Delta x'^0 \;\; \Delta x'^1 \;\; \Delta x'^2 \;\; \Delta x'^3\right) \cdot (Matriz\ F) \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = (\Delta x^0 \;\; \Delta x^1 \;\; \Delta x^2 \;\; \Delta x^3) \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Es decir que, necesariamente debe cumplirse que:

$$\left(\Delta x'^0 \;\; \Delta x'^1 \;\; \Delta x'^2 \;\; \Delta x'^3\right) \cdot (Matriz\ F) = (\Delta x^0 \;\; \Delta x^1 \;\; \Delta x^2 \;\; \Delta x^3)$$

Recordemos ahora nuestra ya conocidísima expresión, cuyo cumplimiento tenemos que forzar para que nuestro desarrollo llegue a buen puerto, que deja invariante una magnitud bajo transformaciones recogidas en el Grupo de Poincaré (y, por ende, en el grupo de Lorentz):

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} \quad ^{112}$$

De manera que tratemos de acercar a este modelo nuestra expresión. Para ello traspongámosla (tiene sentido trasponer, ahora veremos por qué… porque queremos añadir una matriz no traspuesta en el lado no primado… tengamos paciencia):

$$[\left(\Delta x'^0 \;\; \Delta x'^1 \;\; \Delta x'^2 \;\; \Delta x'^3\right) \cdot (Matriz\ F)]^T = (\Delta x^0 \;\; \Delta x^1 \;\; \Delta x^2 \;\; \Delta x^3)^T$$

Que reescribimos como[113]:

$$(Matriz\ F)^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

Ahora, recordemos de nuevo las Transformaciones de Lorentz que hemos impuesto en nuestro proceso:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

Por lo que combinando las expresiones tendremos que:

---

[112] No necesitamos incluir ahora la constante de translación por lo que comentábamos en la nota 101. Por otro lado, si no forzáramos esta condición no estaríamos trabajando bajo Transformaciones de Lorentz y, por lo tanto, la invarianza no se cumpliría.

[113] Recordemos que la *traspuesta de un producto* se hace cambiando el orden de los factores que, efectivamente, también se trasponen.

$$(Matriz\ F)^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} \rightarrow (Matriz\ F)^T \cdot \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

Es decir, que para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

Es necesario que:

$$(Matriz\ F)^T \cdot \Lambda = I$$

¿Cómo podemos despejar esa matriz F traspuesta? Pues por ejemplo, podemos proceder multiplicando por Λ^{-1} en ambos lados de la expresión:

$$(Matriz\ F)^T \cdot \Lambda \cdot \Lambda^{-1} = I \cdot \Lambda^{-1}$$

Que, efectivamente, es:

$$(Matriz\ F)^T \cdot I = I \cdot \Lambda^{-1}$$

$$(Matriz\ F)^T = \Lambda^{-1}$$

Que, si trasponemos, nos deja:

$$(Matriz\ F) = (\Lambda^{-1})^T$$

Es decir, que, para que, tras una transformación del tipo $\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x} + cte$, la magnitud del vector (recordemos, en realidad el cuadrado de la magnitud del vector) permanezca invariante para los dos Sistemas de Referencia[114], los vectores de las bases de los Sistemas de Referencia deben estar relacionados mediante una $(Matriz\ F)$ que sea igual a $(\Lambda^{-1})^T$. Es decir, la matriz ***lambda inversa traspuesta***. Si ***lambda*** "convertía" desde el sistema sin primar al primado, la matriz ***lambda inversa traspuesta*** pasa desde el sistema primado al sistema sin primar.

Veamos cómo se representa esto usualmente en los manuales de Relatividad[115]:

---

[114] Estén Rotados o Trasladados o '*Boosteados*', da igual.

[115] En esta nueva notación $A^{\mu'}$ es el vector invariante desde el punto de vista de SR'; $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ es la matriz transformadora; A^{ν} es el vector invariante desde el punto de vista de SR.
Por otro lado $e_{\mu'}$ es la base del sistema SR'; $\Lambda^{\nu}_{\mu'}$ es la matriz de relación entre las bases de los diferentes sistemas (obsérvese que los subíndices están invertidos pues, como ya sabemos, la matriz es la inversa de la matriz de transformación); e_{ν} es la base del sistema de referencia SR.

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}$$

$$e_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} e_{\nu}$$

OBSERVACIÓN: Expliquemos muy brevemente esta terminología:

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} \Delta x'^0 \\ \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0'}_0 & \Lambda^{0'}_1 & \Lambda^{0'}_2 & \Lambda^{0'}_3 \\ \Lambda^{1'}_0 & \Lambda^{1'}_1 & \Lambda^{1'}_1 & \Lambda^{1'}_3 \\ \Lambda^{2'}_0 & \Lambda^{2'}_1 & \Lambda^{2'}_2 & \Lambda^{2'}_3 \\ \Lambda^{3'}_0 & \Lambda^{3'}_1 & \Lambda^{3'}_2 & \Lambda^{3'}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

Donde, obviamente, según el producto de matrices:

$$\Delta x'^0 = \Lambda^{0'}_0 \Delta x^0 + \Lambda^{0'}_1 \Delta x^1 + \Lambda^{0'}_2 \Delta x^2 + \cdots;\ \Delta x'^1 = \Lambda^{1'}_0 \Delta x^0 + \Lambda^{1'}_1 \Delta x^1 + \Lambda^{1'}_2 \Delta x^2 + \cdots; \ldots$$

La ***inversa traspuesta*** *convierte, ya lo hemos dicho, en sentido inverso:*

$$e_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} e_{\nu}$$

Matriz Inversa (primer paso):

$$\begin{pmatrix} e^0 \\ e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{0'} & \Lambda^0_{1'} & \Lambda^0_{2'} & \Lambda^0_{3'} \\ \Lambda^1_{0'} & \Lambda^1_{1'} & \Lambda^1_{2'} & \Lambda^1_{3'} \\ \Lambda^2_{0'} & \Lambda^2_{1'} & \Lambda^2_{2'} & \Lambda^2_{3'} \\ \Lambda^3_{0'} & \Lambda^3_{1'} & \Lambda^3_{2'} & \Lambda^3_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'^0 \\ e'^1 \\ e'^2 \\ e'^3 \end{pmatrix}$$

Que ahora trasponemos:

$$\begin{pmatrix} e^0 \\ e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{0'} & \Lambda^1_{0'} & \Lambda^2_{0'} & \Lambda^3_{0'} \\ \Lambda^0_{1'} & \Lambda^1_{1'} & \Lambda^2_{1'} & \Lambda^3_{1'} \\ \Lambda^0_{2'} & \Lambda^1_{2'} & \Lambda^2_{2'} & \Lambda^3_{2'} \\ \Lambda^0_{3'} & \Lambda^1_{3'} & \Lambda^2_{3'} & \Lambda^3_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'^0 \\ e'^1 \\ e'^2 \\ e'^3 \end{pmatrix}$$

Pasemos, ahora, a realizar alguna aplicación Física Relativista.

En primer lugar hablemos de un concepto fundamental para el estudio de la naturaleza desde el punto de vista relativista: el principio de ***Acción Mínima***[116].

[116] Algo que nos enseñan, creo recordar, ya incluso en el colegio es que un cuerpo sometido a un campo de fuerza, por ejemplo el gravitatorio, tiene una Energía Total (E_T) que podríamos definir como una combinación, de hecho la suma, de Energía Potencial (E_P) y Energía Cinética (E_c).

$$E_T = E_C + E_P$$

$$E_P = mgh$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

La E_P, efectivamente, es la energía que cualquier partícula, por el mero hecho de estar sometida a las fuerzas del campo y estar a una altura, es decir, teniendo un espacio por delante para poder desarrollarla, puede llegar a desplegar (por eso es potencial, está en potencia). La E_C es, por otro lado, aquella que, de manera efectiva, se ha concretado, manifestado, en movimiento.

Así, si suponemos un cuerpo, suspendido, en ***reposo***, a una altura *h* del centro de gravitación, podremos decir que está en un estado en el que la E_T es:

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$E_T = mgh$$

Pues, como dijimos, al estar en reposo, $\frac{1}{2}mv^2$ es igual a cero.

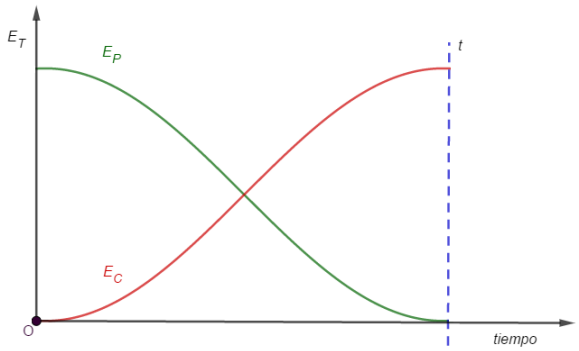
Si, en cambio, dicho cuerpo empezara a caer, a desplazarse hacia el centro de gravitación, empezaría a transformar su E_P en E_C de manera que, justo un diferencial antes de que el cuerpo alcanzara el centro de gravitación (en el momento 't'), su E_P sería igual a cero y su E_C sería igual a la E_P en el momento inicial, es decir, que la Energía Total del sistema se habría transformado y, entonces, sería:

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

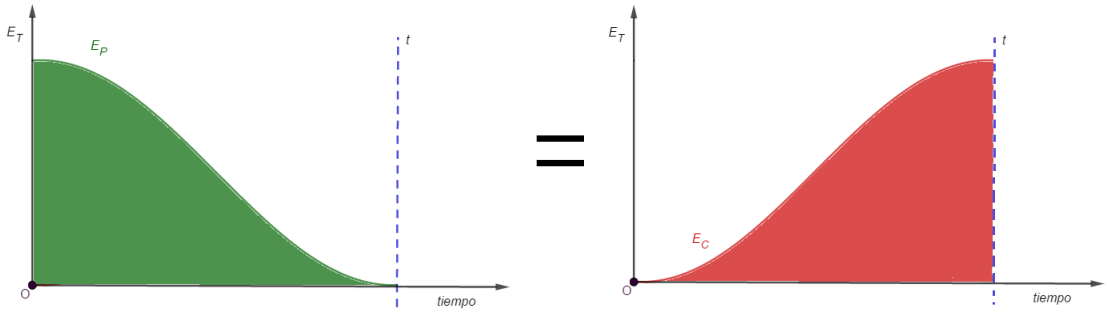
$$E_T = \frac{1}{2}mv^2$$

Pues, ahora, la que es igual a cero es la E_P.

Imaginemos gráficamente este proceso de transformación de la Energía:



Si nos fijamos, claramente, la Cantidad de Energía Total del sistema se conserva en todo momento pues las áreas que subsumen las gráficas de las funciones de E_P y E_C son iguales:



Es decir, que:

$$\int_0^t E_P\, dt = \int_0^t E_C\, dt$$

Sin embargo, ¿qué obtenemos si, en vez de sumar, restamos las energías?

En primer lugar, como es evidente, obtendríamos el remanente de Energía que aún queda en mayor medida pero, lo que más nos interesa, es observar que lo que estamos viendo es "el modo en que se está transformando la Energía Total del sistema"; el modo en que cambia. A esta resta se le llama, justamente: ***Lagrangiano*** (L) (nosotros vamos a usar *L*).

$$\boldsymbol{Lagrangiano \rightarrow L = E_C - E_P}$$

Observemos ahora una serie de matices muy importantes para comprender bien el concepto de Lagrangiano. EL Lagrangiano es una función de funciones… una especie de '***metafunción***'. Antes teníamos dos funciones (E_C, E_P) que adoptaban un valor resultado según el valor de las variables que se les 'introducían' ($v, m, h, \ldots$).

Ahora, en el Lagrangiano las variables son las funciones anteriores, es decir: E_C, E_P. El Lagrangiano será algo así como:

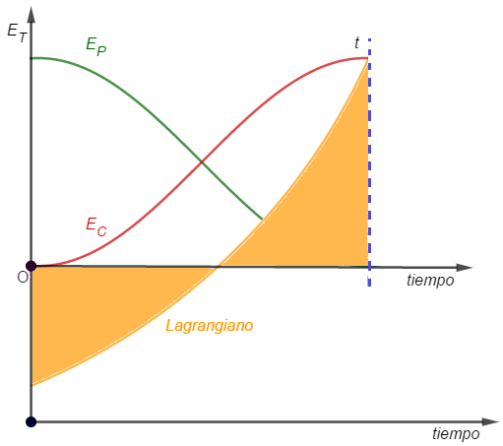
$$L_{(E_C, E_P)}$$

Por eso preferimos referirnos a él como una '*metafunción*': una función de funciones.

En términos generales podríamos definirlo como el camino, energéticamente hablando, más corto entre dos sucesos, eventos, partículas…

Esta nueva '*metafunción*', como es obvio, también tendrá una representación gráfica.

Vamos a imaginar una representación hipotética del *Lagrangiano* coexistiendo con sus funciones origen.



Una 'metafunción lagrangiana' que, naturalmente, cambia si modificamos algo en las funciones que hacen de *INPUT* (también si cambia la variable independiente que 'rige' en dichas funciones).

Lo interesante de esto es que si, efectivamente, modificamos las funciones *INPUT* y el Lagrangiano cambia… ¿Cuál será el *correcto*? Muy simple: aquél que haga que el área***, la integral del lagrangiano, la Acción***, arroje el menor área de todas las posibles.

Los aristotélicos decían que "La Naturaleza aborrece el vacío". Modifiquémosla por "La Naturaleza aborrece los rodeos", es decir, La Naturaleza siempre usa el procedimiento más eficiente.

La '*metafunción*' lagrangiana, además, como es de imaginar, es derivable y, recordemos: ¿qué sucede cuando igualamos la primera derivada de una función a cero? Que hallamos sus máximos y mínimos…. Esto nos será muy útil pues si el máximo/mínimo de una función lo hallábamos mediante:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$$

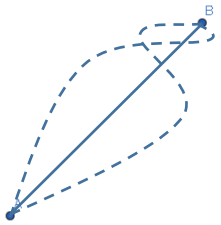
Ahora, con el Lagrangiano haremos (nótese que en el 'mundo de las metafunciones' ***no*** vamos a usar ***d de diferencial***, sino ***delta de diferencia (δ)***):

$$\frac{\delta L}{\delta f(x)} = 0$$

Que nos permitirá estudiar el comportamiento y los puntos de optimización de la nueva '*metafunción*'. Es decir, cómo cambia la '*metafunción*' según cambia la función (o funciones) que se le introduce:

$$\delta s = \frac{\delta L}{\delta f(x)}$$

Supongamos por un momento que tenemos una partícula masiva que se desplaza desde un punto *A* hasta un punto *B* por cualquiera de los infinitos caminos posibles entre ello. Uno de ellos será, no ya el más corto[117], sino el que energéticamente es más eficiente:



En el paradigma newtoniano es fácil ver que, estando la partícula sometida a un campo gravitatorio, podríamos asignar un ***escalar***[118] al total de ***energía***[119] de la partícula fruto de una relación entre la energía potencial de la partícula (la energía que puede llegar a desplegar entre *A* y *B*) y la energía cinética de la partícula (la energía desplegada de manera efectiva a modo de movimiento en su desplazamiento desde A hasta B). Dicho escalar, en su mínima expresión es, precisamente, la '*cantidad*' de ***Acción Mínima Newtoniana***, es decir, de todas las posibilidades, la que minimiza ese escalar es la posibilidad más eficiente. Así, podríamos definir dicho escalar asociado a la Acción Mínima como la suma infinita de la diferencia de dichas *energías* en todos los puntos temporales diferenciales entre *A* y *B*, a saber:

$$AccNew_{min} = \int_A^B (E_c - E_p)dt$$

¿Cuál sería la expresión equivalente a ésta para un Paradigma relativista? O mejor, ¿Cómo definimos la ***Acción Mínima Relativista***?

Pues para llegar a ella debemos definir antes, precisamente, dos condiciones que nos permitan configurar el nuevo escenario:

a) El ***escalar*** asociado a la ***Acción Mínima Relativista*** debe ser una ***magnitud Invariante*** bajo ***Transformaciones de Poincaré***. Es decir, debe tener el mismo valor para dos Sistemas de Referencia que puedan estar *girados*, *trasladados* o '*Boosteados*' entre sí.
b) Esta ***Acción Mínima Relativista*** debe ser coherente con las ***Leyes de Newton*** para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz ($\boldsymbol{v << c}$).

Y justamente tirando de estos dos principios podremos ir construyendo las expresiones que den cuenta del comportamiento Relativista.

Imaginemos un escenario como el de antes, con una partícula *P* ***libre***[120] de masa m, en un ***espaciotiempo***[121] de Minkowski:

---

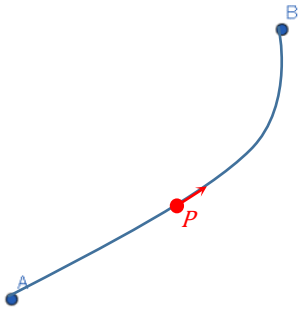
[117] Es obvio que el más corto no siempre tiene por qué ser el más eficiente energéticamente. Pensemos en alguien que quiere rodear una montaña o subirla y bajarla para llegar a un punto que está al otro lado de la montaña…

[118] Véase nota 131.

[119] Medido en newtons.

[120] Que no está sometida a ninguna fuerza, ningún campo, …

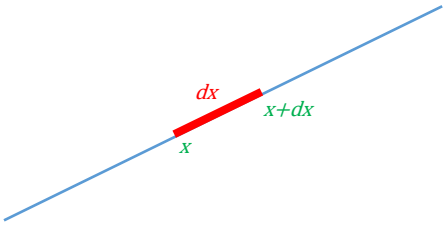
[121] ***Importante***, no es un espacio, es un ***ESPACIOTIEMPO***.



Lo que sea que tenemos que calcular, como es una suma acumulada de un estado de energía en los diferentes puntos de la curva descrita, naturalmente, tendrá una forma parecida a:

$$AccRel_{min} = \int_A^B (escalar\ de\ Lorentz)^{122} dt$$

Ahora, si nos acercáramos mucho a cualquier punto de la curva, veríamos que, como sucede con la superficie de la tierra, lo veríamos plano, recto; y si nos fijamos justo en un diferencial (en rojo) y sus coordenadas (en verde)[123] que vamos a proceder a analizar, veríamos que:



Para ello calcularemos: a) su tamaño y después b) apliquemos el producto escalar[124] por sí mismo para obtener el cuadrado de su magnitud:

---

[122] Ese escalar se denomina Tiempo Propio. Esto es, según se mueva la partícula, un reloj que esté en la partícula marcará un Tiempo Propio, el suyo (será más corto que el que midan otros observadores externos). Cualquier otro observador externo no medirá el proceso en el mismo tiempo pero, extraordinariamente importante, todo observador externo coincidirá en que el tiempo que mide el que se mueve es el mismo. Es decir, 'los de fuera', mirando a la partícula moverse, podrán ponerse perfectamente de acuerdo en que el reloj de la partícula ha medido un tiempo determinado que coincide para todos. Eso pasa porque es un escalar Lorentz (¿por qué no lo es también para que la partícula…? simple, porque hay que aplicarle una matriz de Transformación de Lorentz).

[123] Obviamente $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

[124] Recordemos que era (p. 193):

a. $(x + dx) - x = dx$
b. $dx \cdot dx = (dx)^T \eta\, (dx)$

$$= (dx^0 \;\; dx^1 \;\; dx^2 \;\; dx^3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$$(dx)^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Para evitar problemas con un negativo dentro de la raíz con la coordenada temporal, que siempre avanzará (cosa que no sucederá necesariamente con el resto de coordenadas), multiplicamos por *(-1)* en ambos lados de la expresión[125] (si hubiéramos cambiado de signo la métrica, como comentábamos en su momento, este cambio de signo ahora no sería necesario):

$$-(dx)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Que, efectivamente, tiene toda la pinta de un invariante de Lorentz.

Si seguimos desarrollando, podremos decir que:

$$dx = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}$$

Por lo que el escalar más pequeño posible que se puede asignar a la Acción Mínima Relativista tendrá el aspecto de:

$$\int_A^B \sqrt{\left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2}$$

Pero, claro, aún nos falta definir el patrón de cambio, el diferencial que '*marca el ritmo de cambio*'. Aquí, muy simple, hacemos lo mismo que hicimos cuando parametrizamos una curva para medir su magnitud, es decir: multiplicar por *1* en forma de *dt/dt* dentro de la integral, a saber:

$$AccRel_{min} = \int_A^B \sqrt{\frac{\left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2}{(dt)^2}}\, dt$$

Esto es:

$$(\Delta x)^T \eta\, (\Delta x)$$

[125] Podría pensarse que a pesar del cambio de signo que hacemos no hace sino desplazar el problema pues si, ahora, la parte espacial es mayor que la parte temporal, seguiremos teniendo un valor negativo dentro de la raíz pero resto no será posible (ya lo veremos con más detalle) porque si:

a. $\sqrt{-} \rightarrow$ ***Imposible*** *porque implicaría velocidades* $v > c$
b. $\sqrt{0} \rightarrow$ ***Posible*** *aunque sólo para la luz* $v = c$
c. $\sqrt{+} \rightarrow$ ***Posible*** *porque implciaría velocidades* $v < c$

$$\int_A^B \sqrt{\frac{\left(dx^0\right)^2}{(dt)^2} - \frac{\left(dx^1\right)^2}{(dt)^2} - \frac{\left(dx^2\right)^2}{(dt)^2} - \frac{\left(dx^3\right)^2}{(dt)^2}}\, dt$$

Expresión de la que tendremos que deducir las leyes de la dinámica relativista.

Ahora, muy importante, recordemos algo que hicimos hace ya algunas páginas. Recordemos que definimos:

$$x^0 = ct \rightarrow dx = x^0 = cdt$$

Por lo que, de momento, el primer término de la raíz ya podremos reescribirlo como:

$$\frac{(dx^0)^2}{(dt)^2} = \frac{(cdt)^2}{(dt)^2} = \frac{c^2(dt)^2}{(dt)^2} = c^2$$

Es decir:

$$\int_A^B \sqrt{c^2 - \frac{\left(dx^1\right)^2}{(dt)^2} - \frac{\left(dx^2\right)^2}{(dt)^2} - \frac{\left(dx^3\right)^2}{(dt)^2}}\, dt$$

Por otro lado, el resto de componentes que tenemos, recordemos, son desplazamientos en los tres ejes espaciales *x, y, z*. Es decir, derivadas del espacio respecto al tiempo, por lo que, efectivamente, tendremos que:

$$\int_A^B \sqrt{c^2 - \frac{(dx)^2}{(dt)^2}}\, dt$$

O lo que es lo mismo:

$$\int_A^B \sqrt{c^2 - v^2}\, dt$$

Sigamos transformando hasta llegar a una expresión más cómoda. Multipliquemos por 1 bajo la forma de $\frac{c}{c}$, es decir:

$$\int_A^B \frac{c}{c} \cdot \sqrt{c^2 - v^2}\, dt$$

O lo que es lo mismo:

$$\int_A^B c \cdot \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}\, dt$$

Es decir:

$$\int_A^B c \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$$

Si, para más comodidad, hacemos una aproximación en series de Taylor del término $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, tendremos que:

$$\int_A^B c \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt \approx \int_A^B c \cdot \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)dt$$

O lo que es lo mismo:

$$\int_A^B c-\frac{c}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)dt$$

$$AccRel_{min}=\int_A^B c-\frac{v^2}{2c}dt$$

Recordemos ahora que una de las condiciones que imponíamos era que para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, nuestra expresión debería ser válida para el paradigma newtoniano. Recordemos, pues que definíamos la Acción Mínima Newtoniana como:

$$AccNew_{min}=\int_A^B (E_c-E_p)dt$$

Es decir:

$$AccNew_{min}=\int_A^B \left[\left(\frac{1}{2}mv^2\right)-(mgh)\right]dt$$ [126]

Pero, ya lo dijimos, estábamos hablando de una ***partícula libre***, es decir, que no estaba sometida a ninguna fuerza ficticia[127] por lo que la expresión, realmente, quedaría como:

$$AccNew_{min}=\int_A^B \left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

Por lo que, para velocidades relativamente bajas respecto a la velocidad de la luz debe ser cierto que:

$$c-\frac{v^2}{2c}=\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

[126] Fórmulas archiconocidas:

- Energía cinética: $\frac{1}{2}mv^2$
- Energía potencial bajo la gravedad terrestre: mgh

[127] Véase nota 118.

Se empiezan a parecer pero aún nos quedan algunos ajustes que hacer para alcanzar una similitud satisfactoria. Para '*incrementar esta identidad*' estudiemos el término izquierdo en el que, *grosso modo*, necesitaremos añadir de alguna manera coherente elementos como *c* y *m*… Veamos, de entrada recordemos que ese término provenía de:

$$AccRel_{min} = \int_A^B c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \approx \int_A^B c \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) dt$$

Analicemos los elementos de dentro de la integral (en rojo la aproximación por Taylor):

$$c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx c - \frac{v^2}{2c}$$

Multipliquemos por *(-1)* en ambos lados para cambiar el signo:

$$-c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -c + \frac{v^2}{2c}$$

Ahora multipliquemos por *c* en todos los términos:

$$-c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -c^2 + \frac{v^2}{2}$$

Ahora multipliquemos por *m* en todos los términos:

$$-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Esto que tenemos es extraordinariamente interesante por varios motivos. Dos de ellos fundamentales: el primero, nos acerca a nuestro resultado y el segundo, encontramos por primera vez el archiconocido mc^2 [128].

Sigamos avanzando por nuestra línea de desarrollo.

---

[128] Ojo, esto no es del todo así pero apunta maneras… Recordemos que definíamos la Acción Mínima Newtoniana como:

$$AccNew_{min} = \int_A^B \left[\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - (mgh)\right] dt$$

Y ahora tenemos que la Acción Mínima Relativista es:

$$AccRel_{min} \approx \int_A^B -mc^2 + \frac{mv^2}{2}\, dt$$

Es decir que debe cumplirse que, al menos para velocidades bajas:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - (mgh) \approx \frac{mv^2}{2} - mc^2$$

Es decir que:

$$(mgh) \approx mc^2$$

Es decir que la Energía Potencial de una partícula masiva es:

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

¡Maravilloso!

Si nos fijamos en la expresión del lado derecho, el lado que procedía de la aproximación mediante series de Taylor (en rojo), vemos que ya se parece bastante al lado 'newtoniano' que marcábamos algunas líneas más arriba en azul ($\frac{1}{2}mv^2$):

$$-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Claro, hay algo que nos chirría: ¿qué pasa con ese $-mc^2$ que entorpece nuestra anhelada identidad Relatividad/Newton? Veamos, ***cuando se definen las leyes de la dinámica***, cuando dentro de una integral se introduce la suma de una constante, ésta, como habrá que derivar previamente, antes de la integración, nos dará exactamente igual lo que sea porque se anulará y no afectará a las leyes del movimiento. Es decir, hemos alcanzado la identidad que buscábamos entre Relatividad y Newton, para velocidades bajas:

$$-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Pues, efectivamente, hemos logrado que nos aparezca en ambos lados de la expresión comparativa la energía cinética[129]. Siendo esto así podremos definir la Acción Mínima Relativista Invariante Lorentz (como hemos dicho, coherente con Newton para velocidades bajas) para una partícula libre como:

$$AccRel_{min} = -mc^2\int_A^B \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \quad {}^{130}$$

Y, como dijimos, a partir de esta expresión, podemos extraer las leyes de la naturaleza que explican el comportamiento de una partícula libre en un espacio tiempo de Minkowski[131].

---

[129] En verde Original Relativista, en rojo aproximación por Taylor y en azul Newton:

$$c - \frac{v^2}{2c} \ldots se\ redirigió\ hacia \ldots -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2} \ldots para\ apuntar\ a \ldots \left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

[130] Obviamente, para poder meter la constante $-mc^2$ dentro de la integral habría que derivarla lo que, efectivamente, la anula.

[131] Llegados a este punto se hace importante estudiar un poco más a fondo el concepto de Lagrangiano. Recordemos que, en la nota 116, lo definíamos como una especie de *metafunción*; una función de funciones. Decíamos que la derivada del Lagrangiano nos aportaba una muy útil información acerca del cómo cambia la metafunción en virtud de los cambios en las funciones que la forman y, por el mismo motivo, podíamos estudiar cuál es punto de mayor eficiencia de las mismas y, por lo tanto, cerciorarnos de que responden y son coherentes con las leyes que gobiernan la Naturaleza según el principio por el cual, ésta, "aborrece los rodeos".

La ***integral del lagrangiano***, recordemos, nos daba el tamaño de un área que definíamos como ***Acción Mínima*** (si es que, efectivamente, encontrábamos el menor de las áreas posibles).

Desarrollemos un poco más el concepto de *función* y '*metafunción*'. Puesto que conocemos perfectamente el concepto de función (véase *Apéndice I. Sobre el Cálculo Diferencial e Integral*) podemos preguntarnos: ¿podíamos asignar un escalar a una función?

La respuesta parece obvia: sí.

Veámoslo con más detalles. Supongamos la función:

$$f(x) = x^2$$

El comportamiento de dicha función es:

$$x = 0; y = 0$$
$$x = \pm 1; y = 1$$
$$x = \pm 2; y = 4$$
$$x = \pm 3; y = 9$$
$$\dots$$

La pregunta es, ¿podemos asignar un ***escalar*** a este comportamiento? ¿a este modo de relacionarse x con y? ¿A esta función?

Ya sabemos que sí. Ahora añadimos que a dicho escalar lo vamos a llamar ***FUNCIONAL***.

La cuestión es, ¿cómo decidimos el ***funcional*** que le asignamos? ¿Le asignamos, por ejemplo, el 1? ¿El 2? ¿El 437?...

Naturalmente, lo primero que tendríamos que hacer es establecer un ***algoritmo*** que nos permita decidir de qué manera asignamos el ***funcional*** a la función (esto recuerda un poco a la metodología de Gödel para la demostración de su famoso Teorema).

(OBSERVACIÓN: Importante, no confundir la función con la metafunción. Esto a veces es lioso)

En términos generales se suele llamar ***Lagrangiano*** a esta *metafunción*, aunque el Lagrangiano, propiamente dicho, ya lo sabemos, es el que se define como $L = E_C - E_P$. Supongamos, de cualquier manera (esto es un ejemplo inventado sobre la marcha) que el algoritmo mediante el que asignamos un funcional a la función $f(x) = x^2$ es:

$$S[f(x)] = \int_0^1 f(x) + f'(x)\, dx$$

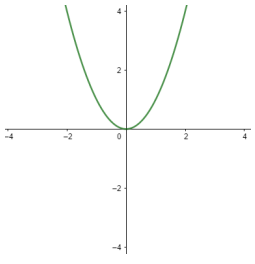
Veamos qué funcional aporta nuestro algoritmo:

$$S[f(x)] = \int_0^1 x^2 + 2x\, dx$$

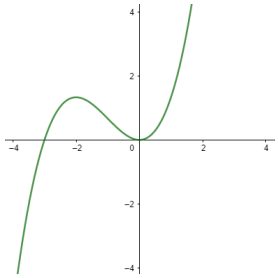
$$S[f(x)] = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} + 1^2 - \left(\frac{0^3}{3} + 0^2\right) = \frac{4}{3}$$

Es decir, que, con ese algoritmo, ese '*Lagrangiano*,' asignamos a la función $f(x) = x^2$ el ***funcional*** 4/3.

Así, mientras que la gráfica de la función $f(x) = x^2$, es:



La gráfica de la *metafunción generadora de funcional* $S[f(x)] = \int x^2 + 2x\, dx \rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2$ (obsérvese que no integramos de manera definida para no aportar un valor concreto, sino ver todo el recorrido de la metafunción) es:



Con sólo ver el gráfico de la metafunción sabemos que es derivable.

Ahora olvidemos este ejemplo que hemos usado para ilustrar el concepto y definamos el funcional de una manera más genérica y con el fin de deducir las Leyes de Newton***: usando el Lagrangiano***:

$$\boldsymbol{L = E_C - E_P}$$

(OBSERVACIÓN: si lo que quisiéramos buscar fuera algo diferente a las Leyes de Newton, la metafunción-algoritmo L debería ser diferente al Lagrangiano)

Es decir, nuestra metafunción va a ser la Integral desde t_a a t_b del Lagrangiano: $\boldsymbol{L = E_C - E_P}$, y vamos a poder estudiarlo mediante:

$$S[f(x)] \equiv \int_{t_a}^{t_b} L(E_C, E_P)\, dt$$

Más genéricamente:

$$S \equiv \int_{a}^{b} L\, dx$$

Esta expresión nos dará un ***funcional*** que además, siendo como es una ***integral de una función*** (en realidad *metafunción*) nos va a dar el ***área*** que subsume la misma y que identificamos con la ***Acción*** desplegada por la metafunción (en este caso, el Lagrangiano propiamente dicho).

Para entender esto y el role que desempeñan la funciones, variables, metafunciones, hagamos algunas aclaraciones.

Las funciones que van a formar nuestra *metafunción* serán, como sabemos:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_P = mgh$$

En los procesos estudiados en la Mecánica Clásica…¿Qué variables tenemos? $t, x, v, a, \ldots$

De las cuales:

- ***t suele ser la variable independiente*** (parece obvio, pues pase lo que pase, se mueva o no un cuerpo, el tiempo discurre… el tiempo es el cambio base en el que se apoyan el resto de variables).
- ***x, v, a, … son funciones dependientes de t*** (*espacio, velocidad, aceleración*, … suelen estar definidas en torno al cambio temporal).

Sin embargo con esto: $S[f(x)] \equiv \int_{t_a}^{t_b} L(E_C, E_P)\, dt$, de momento, no vamos a poder trabajar mucho así que vamos a reformularlo y tratemos de llegar a una expresión más general que nos permita

realizar la derivada del funcional $S \equiv \int_a^b L\,dx$. En tal sentido, vamos a buscar, deducir, la fórmula para ***derivar un funcional*** que se conoce como la ***Fórmula de Euler-Lagrange***.

Para ello replanteemos el ***funcional*** (la ***Acción***) de manera genérica como:

$$\boldsymbol{S[f(x)] \equiv \int_a^b L(f, f')\,dx}$$

Es decir, repetimos, el funcional, la Acción, es el escalar obtenido mediante la integración desde a hasta b de una metafunción que llamamos genéricamente como Lagrangiano.

(OBSERVACIÓN:

(a partir de ahora vamos a marcar la derivada primera como: $\dot{x}$, la segunda: $\ddot{x}$, la tercera $\dddot{x}$, …)

Esta nueva reformulación*: una metafunción-algoritmo L que está en función de una función y su derivada,* no es tan arbitraria, al menos para las Leyes de Newton, como uno pudiera pensar en un principio pues… ¿qué relación hay entre la E_C y la E_P?

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

Si derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}E_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Como la masa es constante, podemos decir que:

$$\frac{d}{dt}E_C = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)$$

(a partir de ahora vamos a marcar la derivada primera como: $\dot{x}$, la segunda: $\ddot{x}$, la tercera $\dddot{x}$, …)

$$\frac{d}{dt}E_C = \frac{1}{2}m2\dot{v} = m\dot{v}$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}E_C = m \cdot a$$

(que no está nada lejos de la definición que dábamos de la E_P)

Hemos dicho, además, que el ***FUNCIONAL S***, es derivable, es decir, que podemos estudiar cómo cambia según cambian los valores que se le introducen: su ratio de cambio. Así podremos definir ***la derivada del funcional*** como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boldsymbol{cambio\ que\ se\ produce\ en\ el\ funcional\ S[f(x)]}}{\boldsymbol{cambio\ que\ se\ produce\ en\ f(x)}}$$

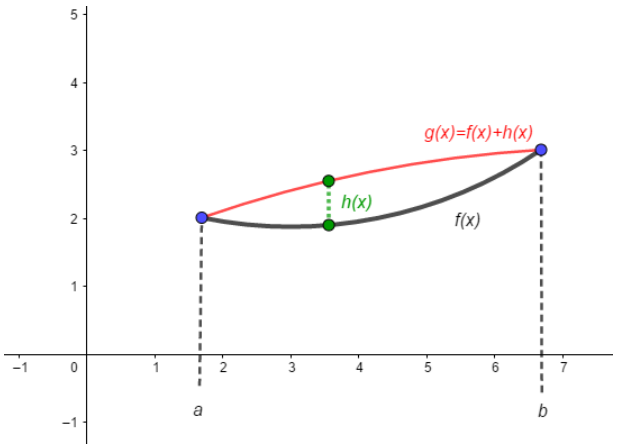
O lo que es lo mismo (usamos delta δ para los cambios en las funciones de segundo orden (funciones de funciones)):

$$\frac{\delta S}{\delta f}$$

Hagamos ahora un pequeño cambio de tercio que nos va a ser necesario para seguir con el camino hacia la Fórmula de Euler-Lagrange que nos permita derivar un funcional.

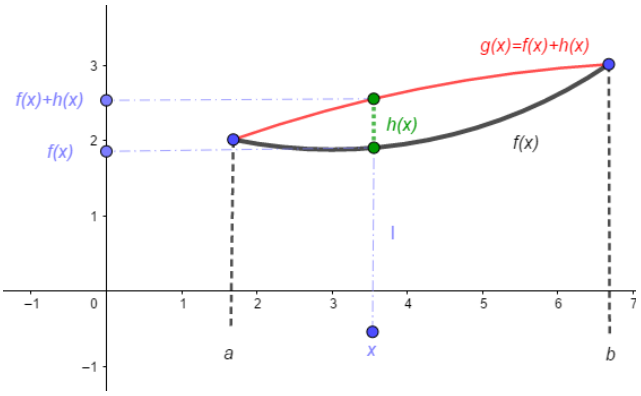
Vamos a analizar qué relación puede haber entre una función *f(x)* y otra función aproximada *g(x)*.

Establezcamos la condición de que la función aproximada *g(x)* debe coincidir con *f(x)* en los puntos *a y b*. de inicio y fin. Imaginemos que es algo como esto:



La función aproximación, como vemos, parte y llega a los mismos puntos que *f(x)* pero hay momentos en que se aleja. Dicha variación, dicha *lejanía vertical variable*, es otra función *vertical h(x)* que hemos dibujado en verde. Es decir, *g(x)* y *f(x)* se distancian mutuamente mediante otra función vertical *h(x)*.

Así, si para *f(x)* tomamos una *x* obtenemos un valor en *y=f(x)* mientras que, para el mismo valor de *x* en la función *g(x)* obtendremos un valor *f(x)+h(x)*:



Apliquemos ahora la definición que hemos hecho del ***funcional*** (***y que no es otra cosa que el escalar con el que identificamos la Acción***):

- Función Original:

$$S[f] = \int_a^b L(f, f')\, dx$$

- Función Aproximación:

$$S[f+h] = \int_a^b L(f+h, f'+h')\, dx$$

Entonces, ¿cómo cambiaría el ***funcional*** (la ***Acción***) al introducir el 'elemento distorsionador' $h(x)$? Parece simple:

$$\delta S = \int_a^b L(f+h, f'+h')\,dx - \int_a^b L(f, f')\,dx$$

Que podemos reescribir como:

$$\delta S = \int_a^b [L(f+h, f'+h') - L(f, f')]\,dx$$

Pero, si nos fijamos, ¿qué es lo que hemos marcado en rojo? El cambio del algoritmo genérico (de nuestro algoritmo generador de escalares que después, más tarde, sustituiremos por el Lagrangiano $L = E_C - E_P$ pero que de momento es sencillamente esto: $L(f+h, f'+h') - L(f, f')$) por lo que podremos reescribir ***el cambio en el funcional*** (la ***Acción***) como:

$$\delta S = \int_a^b \delta L\,dx$$

-----∫-----

RECORDATORIO INTERESANTE SOBRE LAS DERIVADAS PARCIALES

(véase Apéndice I. Sobre el Cálculo Diferencial e Integral)

Recordemos que cuando conocimos las derivadas de funciones de varias variables teníamos que, por ejemplo, para una función:

$$f(x,y) = 3x^3y + 2x^2y^2 - 7y + 8x$$

Obteníamos (para la derivación parcial de x (∂x), y se comporta como una constante y viceversa):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 9x^2y + 4xy^2 + 8$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^3 + 4x^2y - 7$$

La segunda derivada parcial era:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 18xy + 4y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = 4x^2$$

Derivadas parciales que también podemos cruzar entre variables:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 9x^2 + 8xy$$

OBSERVACIÓN 1:

También debemos recordar que la variación (delta) de una función de más de una variable venía definida como:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(que tiene todo el sentido del mundo)
FIN DEL RECORDATORIO

-----∫-----

Así, teniendo en cuenta este pequeño recordatorio que hemos introducido, y retomando por donde íbamos:

$$\delta S = \int_a^b \delta L \, dx$$

Donde, según hemos recogido en la *Observación 1* del anterior *Recordatorio*, el *delta L* (lo rojo) lo podemos reescribir como:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'$$

Ahora, a tenor de todo esto, nuestra expresión, el cambio en el funcional (cómo evoluciona el funcional, la Acción, cuando realizamos cambios en las funciones que le hacen de *INPUT*), tiene una pinta más o menos como:

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\right] dx$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta S = \int_a^b \boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial f}\delta f \, dx} + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \, dx$$

Observamos que la parte que hemos marcado en verde la tenemos, digamos, en función de f (***importante: recordemos que δf, el incremento, cambio, en f, era $h(x)$***) , mientras que la parte azul está en función de f'. Tratemos de poner la parte azul, también, en función de f.

Para seguir procediendo recordemos (nos remitimos de nuevo al *Apéndice I. Sobre el Cálculo Diferencial e Integral*) que la integración por partes de un producto se resolvía mediante la regla:

$$\int u \, dw = uw - \int w \, du$$

Apliquémosla a nuestra expresión azul (la que está en función de f'):

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \, dx = \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f - \int_a^b \delta f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) dx$$

Recordemos que $\delta f = h(x)$ y que $h(x)$ en los puntos a y b era igual a cero:

$$h(a) = h(b) = 0$$

De manera que, si evaluáramos la integral al completo entre a y b tendríamos algo parecido a:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\,dx = \left[\frac{\partial L}{\partial f'}\delta f - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\right]_a^b$$

Donde la parte que hemos marcado en rojo, que queda fuera del integrando en la primera fase de la integración, se anula, pues es una multiplicación por cero.

(OBSERVACIÓN: podríamos preguntarnos por qué no se anula el δf de la parte que 'permanece más tiempo dentro del integrando'. La respuesta es que cuando se realiza la suma de infinitos diferenciales entre a y b, naturalmente, el área no será igual a cero)

Nos queda, entonces, la parte de puntos suspensivos que hemos marcado en verde, que es:

$$-\int_a^b \delta f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)dx$$

Y que, por fin, está también en función de f, que es lo que buscábamos. Ahora, retomemos la parte que teníamos desde el principio en función de f y unamos las dos partes. Nos queda lo siguiente:

$$\boldsymbol{\delta S = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}\delta f\,dx - \int_a^b \delta f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)dx}$$

Que es lo mismo que decir:

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}\delta f - \delta f \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]dx$$

Si factorizamos, tenemos:

$$\delta S = \int_a^b \delta f\left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]dx$$

Si ahora multiplicamos en ambos lados de la expresión por $\frac{1}{\delta f}$ (ojo que esto está hecho a lo bruto…), nos queda:

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]dx = 0$$

Y ahora, recordemos, ¿cómo habíamos definido algunas líneas antes la derivada el ***FUNCIONAL***? Mediante:

$$\frac{cambio\ que\ se\ produce\ en\ el\ funcional\ S[f(x)]}{cambio\ que\ se\ produce\ en\ f(x)} = \frac{\delta S}{\delta f}$$

Es decir, que ya tenemos la expresión que nos va a permitir realizar la ***derivada del funcional***:

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]dx = 0$$

Y ***para que esta integral sea cero, basta con que el integrando sea cero***, es decir, que ya tenemos la:

Fórmula de Euler-Lagrange:

$$\boldsymbol{\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)=0}$$

Mediante la misma podremos dar cuenta del cambio que se produce en la ***Acción*** (el ***funcional***) cuando se cambia un poco ($h(x) \to \delta f$) la función '*interna*' $f(x)$.

Ahora, usando el ***Lagrangiano*** en sentido estricto-clásico (no el genérico) dentro de esta fórmula de Euler-Lagrange, podremos estudiar el *encaje* de las Leyes de Newton con la Naturaleza.

Para ello, con el fin de deducir la 2ª Ley de Newton, veamos a continuación un ejemplo de su aplicación empleando, en esta fórmula de ***Euler-Lagrange***:

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)=0$$

Usando, efectivamente, el ***Lagrangiano en sentido clásico*** como *metafunción-algoritmo* L, es decir:

$$L = E_C - E_P$$

Antes de empezar, como ya esbozamos previamente, 'traduzcamos' los términos de la Fórmula de Euler-Lagrange, al nuevo escenario, ya en aplicación, Lagrangiano-Newtoniano.

- dx será dt (pues t es la variable independiente).
- $f(x)$ será x (pues el espacio es una función de t).
- $f'(x)$ será $\dot{x}$ (pues la velocidad, también en función de t, es la derivada del espacio).

Sabiendo que la Fórmula de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$$

Y puesto que, como hemos dicho, L es el ***Lagrangiano clásico***:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx$$

Veremos que, la parte roja de nuestra expresión queda como:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx]}{\partial x}=-mg$$

Y la parte azul:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx]}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{x})=m\frac{d}{dt}\dot{x}=m\ddot{x}=ma$$

Es decir, que, todo junto, tenemos:

$$-mg - ma = 0$$
$$-mg = ma$$
$$-g = a$$

Y a partir de aquí podemos deducir el resto de leyes de la Dinámica Newtoniana pues sabemos que:

$$v = \int a\, dt = -\int g\, dt = -gt + Cte$$

Es decir, que tenemos una aceleración por el tiempo (velocidad) más una constante que podríamos considerar como una velocidad inicial:

$$v = -gt + v_0$$

Y, ahora, si volvemos a integrar esto, ¿qué tenemos? La integral de una velocidad, es decir: el espacio recorrido:

$$x = \int v\, dt = \int (-gt + v_0)\, dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + cte$$

Donde, efectivamente, la constante sería una posición inicial, es decir:

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

Y ya tendríamos deducidas las leyes de la Mecánica Clásica.

Veamos un ejemplo adicional. Imaginemos que tenemos un cuerpo de masa m que se desliza, sin acelerar, sobre una superficie sin rozamiento alguno. Sabemos que:

$$L = E_C - E_P = 0$$

Es decir:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx = 0$$

Pero hemos dicho que se desplaza sobre una superficie, es decir, no tiene altura alguna, por lo que $mgx = 0$, luego la expresión realmente es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 0$$

Y según nuestra fórmula de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Que sustituyendo por bloques tenemos:

a. $\frac{\partial L}{\partial x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\partial x} = 0$$

Puesto que ésta es cero, digamos, todo depende de la otra parte, que debe ser cero.

Así, ahora (*importante conocer el contenido de la nota 131*), podremos deducir desde esta expresión relativista las leyes de Newton pues aquéllas deben ser, a velocidades muy bajas respecto a la luz, perfectamente consistentes con las clásicas.

---

b. $-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

$$-\frac{d}{dt}(m\dot{x})=0$$

$$-m\frac{d}{dt}\dot{x}=0$$

Es decir, resolviendo la derivada:

$$-m\ddot{x}=0$$

O lo que es lo mismo:

$$-ma=0$$

Y puesto que es presumible que la masa es distinta de cero (en definitiva, hemos dicho que es un cuerpo masivo desplazándose), necesariamente, para que se cumpla la igualdad debe resultar que:

$$-a=0$$

Es decir, que no tiene aceleración… luego, el cuerpo se desplaza con velocidad constante; cosa que es perfectamente compatible con el escenario planteado para el ejemplo.

Además, observemos una cosa que nos avisaba antes de terminar:

$$\frac{d}{dt}\dot{x}=0$$

Es decir, se nos está diciendo que la derivada de algo es igual cero. ¿Qué clase de 'entidades' tienen derivada igual a cero? Las constantes, luego ya se nos estaba avisando de que $\dot{x}$ (la velocidad) era constante.

Estudiemos, entonces, la expresión:

$$AccRel_{min} = -mc^2 \int_A^B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

Es decir, la ***Acción*** definida mediante un ***escalar invariante de Lorentz*** cuyo ***Lagrangiano*** (esta vez no clásico, sino ***relativista***) está definido mediante la expresión:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Recordemos la *Fórmula de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) = 0$$

Traduzcámosla, como hicimos en la nota 131, a nuestro escenario:

- $dx \rightarrow dt$
- $f(x) \rightarrow x(t) \rightarrow \vec{x}$
- $f'(x) \rightarrow \dot{x}(t) \rightarrow \vec{v}$

Y empecemos por sustituir:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$$

Es decir que, necesariamente:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

Comencemos por estudiar la parte que hemos marcado en azul:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right]}{\partial \vec{x}} = 0$$

Pues no el Lagrangiano no está en función de $\vec{x}$.

Esto, de entrada, ya nos está dando una información muy importante sobre la parte marcada en roja pues si:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)$$

Tendremos que, si en la parte roja, lo que está metido entre paréntesis, al ser derivado parcialmente por el tiempo obtenemos que es cero, necesariamente, eso que esté dentro del paréntesis será ***constante***. Veamos qué es eso.

(OBSERVACIÓN: puesto que ya están contenidas las tres dimensiones espaciales, es decir, tenemos la velocidad como trivector, como trivelocidad, podemos poner ya la flecha de vector. Cuando se haya incorporado la componente temporal, es decir, cuando sea un cuadrivector, no podremos poner esa 'flecha vectorial')

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Que, recordando el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Podemos reescribir como:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m\vec{v}$$

Que no es otra cosa que la definición relativista de la cantidad de movimiento o momento:

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m\vec{v}}$$

Y puesto que, como hemos visto que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = 0$$

Entonces (maravilloso) como dijimos antes:

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m\vec{v}}$$

Es una magnitud constante.

Veamos ahora si es compatible, a bajas velocidades, con la definición de *Momento* en la Mecánica Clásica. ¿Cómo se definía la *cantidad de movimiento*, el *momento lineal*, el *momento*, en el mundo clásico?

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

A velocidades bajas ($v << c$), ¿se cumple la siguiente expresión?

$$m\vec{v} = \gamma m\vec{v}$$

Veamos:

$$m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde, si, como decimos, $v << c$, resultará que:

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 0$$

Luego:

$$m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - 0}}$$

$$m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1}}$$

$$m\vec{v} = m\vec{v}$$

Q.E.D.

¿Y si, para terminar de redondear el procedimiento, quisiéramos expresar el Momento Relativista mediante un cuadrivector?

Naturalmente, tendremos que introducir la componente temporal.

Probemos a ver qué tal. En primer lugar ya sabemos que el Momento Relativista debe ser una magnitud constante:

$$p = cte$$ [132]

Por otro lado, sabemos que estamos tratando con un Escalar de Lorentz (***es decir, una magnitud invariante para cualquier observador que no es sino el producto por sí mismo y la métrica***):

$$p^2 = -(p^0)^2 + (\vec{p})^2$$

Sabemos que esa magnitud debe ser constante (llamémosla k) bajo Transformaciones de Lorentz:

[132] Nótese que, al tratarse de un cuadrivector, ya hemos quitado la 'fecha vectorial'.

$$-(p^0)^2 + (\vec{p})^2 = k$$

Luego:

$$(p^0)^2 = (\vec{p})^2 - k$$

Que como sabemos es:

$$(p^0)^2 = (\gamma m\vec{v})^2 - k$$

Es decir:

$$p^0 = \sqrt{\gamma^2 m^2 v^2 - k}$$

Que reescribimos como:

$$p^0 = \sqrt{\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - k}$$

Haciendo común denominador:

$$p^0 = \sqrt{\frac{m^2v^2 - k + \frac{kv^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Vamos a forzar un poco las cosas. La forma que debería tener p^0 tendría que parecerse en algo a $\vec{p} = \gamma m v$… Hagamos un poco de *Deus Ex Machina*. Supongamos que tiene la forma, efectivamente, muy parecida de:

$$p^0 = \gamma mc$$

Para que esto sea así tendríamos que extraer de la expresión:

$$p^0 = \sqrt{\frac{m^2v^2 - k + \frac{v^2}{c^2}k}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Algo como:

$$p^0 = \gamma\sqrt{-k}$$

Para que esto se dé, en nuestra expresión, lo que marcamos en rojo debería ser de igual magnitud pero de sentido contrario:

$$p^0 = \sqrt{\frac{m^2v^2 - k + \frac{v^2}{c^2}k}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Es decir que debe cumplirse que:

$$m^2v^2 + \frac{v^2}{c^2}k = 0$$

Cosa que podemos forzar haciendo que:

$$k = -m^2c^2$$

De manera que, finalmente, efectivamente, tendríamos que:

$$p^0 = \gamma\sqrt{-k}$$

$$p^0 = \gamma\sqrt{m^2c^2}$$

Es decir:

$$p^0 = \gamma mc$$

Finalmente, a modo de conclusión de esta primera sección en que hemos abordado los fundamentos de la Teoría de la Relatividad Especial, vamos a hacer un interesante desarrollo.

Sabemos que el intercambio de coordenadas entre dos sistemas de referencia inerciales SR y SR' responden a la forma:

$$\overrightarrow{x'} = \Lambda \cdot \vec{x}$$

Donde:

$$\Lambda = e^{(\omega K^1)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y que conforman las Transformaciones de Lorentz. Desde éstas, se conforma un invariante Lorentz (propuesto por Hermman Minkowski):

$$(\Delta S)^2 \equiv (\Delta S')^2$$

Construido de manera que[133]:

$$(ct \quad x \quad y \quad z) \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ct' \quad x' \quad y' \quad z') \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Pues es un escalar Lorentz (un tensor[134] de rango cero).

Llegados a este punto, es fácil calcular la ***cuadrivelocidad*** *(qV)*, pues sabemos que la velocidad es la derivada respecto al ***tiempo propio***[135] (τ) de la ***cuadriposición*** de la partícula estudiada:

$$qV = \frac{dS}{d\tau}$$

---

[133] Definimos la métrica de Minkowski como: $\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[134] En la sección de Relatividad General veremos qué es esto.

[135] La ***variación del tiempo propio***, el medido '*internamente*' por la propia partícula, se define como:

$$d\tau = \gamma^{-1}dt \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t$$

Donde:

$$qV = \frac{dS}{d\tau} = \frac{d(-ct + x + y + z)}{d\tau}$$

$$= -c\left(\frac{dt}{d\tau}\right) + \frac{dx}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau}$$

$$qV = -c + v_x + v_y + v_z$$

Que para una partícula en reposo sería:

$$qV = -c$$

Es decir, que la cuadrivelocidad tiene una magnitud de c (que es constante).

Y que es expresable como magnitud ***Escalar Lorentz Invariante*** elevándola al cuadrado de manera que:

$$(qV)^2 = -c^2$$

Esta es una expresión de gran relevancia pues quiere decir que en Relatividad Especial (y General) no existe tal cosa como una coordenada igual a cero para el estado de reposo pues, como mínimo, cualquier partícula está siempre moviéndose a través del tiempo (muy importante esto en Relatividad General a la hora de identificar la curvatura del espaciotiempo… pues el que se curva significativamente de verdad es el tiempo).

Visto esto, es decir, que la cuadrivelocidad es igual a una constante, necesariamente la derivada de la cuadrivelocidad respecto al ***tiempo propio*** de la partícula, a saber, la ***cuadriaceleración*** qA, será igual a 0 (lo que es coherente con el escenario inercial que estamos estudiando en Relatividad especial), es decir:

$$qA = \frac{dqV}{d\tau} = \frac{d(-c)}{d\tau} = \frac{0}{d\tau} = 0$$

Esto, además, tiene una implicación interesantísima pues resulta que una propiedad importante de la cuadriaceleración de una partícula es que su producto escalar con la cuadrivelocidad es siempre igual a cero (recordemos que la métrica de Minkowski debe estar '*auditando'* el producto escalar en el espacio tiempo):

$$qA \cdot qV = qA \cdot \eta \cdot qV = 0$$

Lo que implica que ***la velocidad y la aceleración en el espaciotiempo relativista son siempre ortogonales***[136]***.***

Finalmente hemos visto hace poco que el ***cuadrimomento*** expresado como un Escalar de Lorentz (***una magnitud invariante para cualquier observador que no es sino el producto por sí mismo y la métrica***) era:

$$p^2 = -(\gamma mc)^2 + (\vec{p})^2$$

---

136 Esto tiene importantes implicaciones de tipo ontológico y epistemológico. La aceleración apunta a una dirección linealmente independiente de la velocidad... Algo así como que la aceleración apunta hacia una especie de línea del espacio tiempo diferente a aquella por la que discurría un cuerpo con velocidad uniforme. Sucedería algo así como que cualquier aceleración, cualquier cambio en la velocidad de un cuerpo, implica una desviación de la senda uniforme (como la componente perpendicular de la aceleración en un movimiento circular en el que el módulo de la velocidad (tangente al círculo) no cambia porque la aceleración paralela es igual a cero, pero la aceleración perpendicular provoca un cambio de dirección en la velocidad, aunque no un cambio en su módulo).
Por eso la paradoja de los gemelos en la Relatividad Especial se salvaguarda: porque la aceleración rompería la simetría Lorentziana según la cual ambos podrían discutir eternamente diciendo que el que se ha movido es el otro. Veamos esto.

En el caso de la Relatividad General es fácil determinar qué gemelo envejecerá menos: el que se aleja del campo gravitatorio pues, estará habitando en un espaciotiempo '*más curvado*' (¡sí, más curvado! Véase la aclaración final de esta nota) y, por lo tanto, su reloj discurrirá de manera diferente (más lento) al de su hermano que permanece en las cercanías del cuerpo masivo estable.
El problema en Relatividad Especial es que no hay campo gravitatorio. Si un gemelo se aleja de otro ¿quién es el que de verdad se aleja? ¿quién es el que se aleja, digamos, *activamente*? Como decíamos, ni el uno y ni el otro podrán aclararlo (si desde siempre se han encontrado en una disposición de alejamiento). Sin embargo, el nudo de la cuestión radica en que si antes viajaban estacionariamente uno junto al otro, el tiempo discurría de igual modo para ambos pero si, repentinamente, uno de ellos empieza a alejarse respecto del otro, ya se produciría un salto en la '*trayectoria espaciotemporal*' (de hecho esto hablar de esto en Relatividad Especial es hacer trampa, pues si hay aceleración los sistemas dejan de ser Inerciales y, por lo tanto, dejamos de estar en un entorno de Relatividad Especial). Uno de ellos modifica su velocidad relativa respecto del al otro. Cuando se vuelvan a encontrar (si es que eso sucediera) de nuevo reanudarían la discusión acerca de quién realmente fue el que cambió su velocidad. Sin embargo ambos notarán que uno de ellos está menos envejecido que el otro. ¿Quién habrá envejecido más lentamente? Aquél que haya hecho el cambio de velocidad; aquél que se haya sometido a las aceleraciones de cambio de velocidad para "*ir y volver*". Uno y otro podrían decir que ha sido el otro el que ha cambiado el sentido de su movimiento pero lo cierto es que sólo uno de ellos habrá sentido los efectos de una fuerza ficticia (la inercia) propia de ser sometido a un cambio en su estado; un cambio en su velocidad…en definitiva, una aceleración.

El cambio en el tiempo, finalmente, no estaría basada tanto en la velocidad de desplazamiento como en el sometimiento a algún tipo de aceleración. Efectivamente, la deformación del espaciotiempo es proporcional a la velocidad pero… ¿acaso para alcanzar velocidades muy altas, frenarlas y activarlas de nuevo en sentido contrario no hacen falta aceleraciones muy altas?
Efectivamente, la deformación del espaciotiempo depende de la velocidad, como vemos en las Transformaciones de Lorentz pero, a su vez, estas velocidades, ya en sistemas no inerciales, dependen de las aceleraciones a las que se someten lo sistemas. Aunque sea mínimamente, cambiar de estado, moverse, rejuvenece. No sólo por sus beneficios para la salud, sino que físicamente, detenemos un poco el tiempo.

ACLARACIÓN FINAL DE ESTA NOTA: Hemos dicho *más curvado*. Efectivamente, en primer lugar nos choca porque alguien podría pensar que el espaciotiempo alejado de un campo gravitatorio está más plano, menos curvado, que el que está cerca del cuerpo masivo pero, recordemos, hemos dicho que el gemelo que viaja se sometería a aceleraciones (si queremos que el experimento se note) desmesuradas y… pensemos por un momento, ¿qué es una aceleración? ¿Puede distinguir alguien que, por ejemplo, vaya en un ascensor qué fuerzas ficticias, de las que percibe, son debidas a la gravedad y cuáles se deben a las aceleraciones del ascensor? ¿Qué diferencia hay, pues, entre una atracción gravitatoria y una aceleración? ¿No son acaso las aceleraciones, generaciones de campos gravitatorios? ¿No estamos curvando el espacio tiempo cada vez que aceleramos?

Que para un cuerpo en reposo será:

$$p^2 = -(mc)^2$$

Y puesto que la ***masa invariante***[137] está relaciona con la Energía y el momento lineal del siguiente modo:

$$(mc^2)^2 = E^2 - p^2c^2$$

Donde se observa que la Energía de una partícula en reposo es un invariante independiente. Puesto que para una partícula en reposo tenemos que $p = 0$, y, por lo tanto, $p^2c^2 = 0$, podremos reescribir la expresión anterior como:

$$(mc^2)^2 = E^2$$

O lo que es lo mismo:

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

Véase el Apéndice I con la notación de Einstein y la reformulación con las expresiones relevantes siguiendo la notación oficial comparada con la que hemos usado para poder transliterar los textos en beneficio de la claridad.

[137] Esto lo veremos bien en el Libro II sobre la Relatividad General.